1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1.1. Definiciones

Una **sucesión** de números reales es una secuencia ordenada de números.

Ejemplo:

- Las siguientes secuencias son sucesiones:
  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,...
  b) 2, 4, 6, 8, 10, 12,...
  c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6},...$

Se llama **término de una sucesión** a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión.

Para representar los diferentes términos de una sucesión se usa una misma letra con distintos subíndices. Estos subíndices indican el lugar que ocupa ese término en la sucesión.

Ejemplo:

- En la sucesión a) tendríamos que: $a_5 = 5$, ya que es el término de la sucesión que ocupa el quinto lugar.
- En la sucesión b), el tercer término, se denotaría b_3 y correspondería al 6
- En la sucesión c), por ejemplo $c_2 = \frac{1}{2}$

Lo realmente importante a la hora de nombrar los términos de una sucesión es el subíndice porque denota el lugar que ocupan en la sucesión. Las letras con las que se designa la sucesión son distintas para sucesiones distintas y suelen ser letras minúsculas.

Se llama **término general de una sucesión** al término que ocupa el lugar *n*-ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión (por ejemplo *a*) con subíndice *n*: (a_n)

Ejemplo:

- En los casos que estamos considerando, los términos generales de las sucesiones serían: a_n, b_n y c_n.

Si nos fijamos, los valores que toman los subíndices son números naturales, pero los términos de la sucesión no tienen por qué serlo, es decir, los valores que toma la sucesión son números reales. Por eso, podemos definir sucesión de números reales de forma más rigurosa como:

Definición:

Se llama **sucesión de números reales** a una aplicación que hace corresponder a cada número natural un número real.

Actividades resueltas

- *En las sucesiones anteriores, observamos que:* $a_{1003} = 1003$, $b_{12} = 24$ *y* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

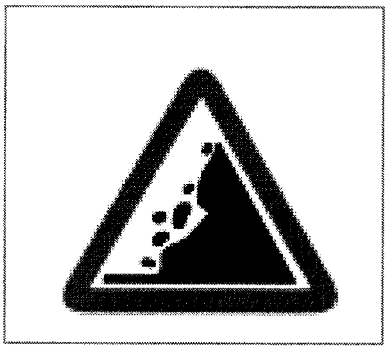
   a) −1, −2, −3, −4,...

   b) 1, 4, 9, 16,...

   c) 1, 3, 5, 7,...

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.

3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9,8 m/s (aproximadamente 10 m/s).. Si en el primer segundo su velocidad es de 15 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 20 segundos? Representa gráficamente esta función.



Tiempo en segundos	1	2	3
Velocidad en m/s	15		

1.2. Formas de definir una sucesión

Existen varias formas de definir una sucesión:

1. **Dando una propiedad que cumplan los términos de esa sucesión**

Ejemplo:

- Sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, 10,...
- Sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11,..
- Sucesión de los números naturales acabados en 9: 9, 19, 29, 39, ...
- Sucesión de los cuadrados de los números naturales: 1, 4, 9, 16,...

2. **Dando su término general o término *n*-ésimo**:

Es una expresión algebraica en función de *n*.

Ejemplo:

- $a_n = n^2 + 3$

  Sabiendo esto, podemos construir los términos de la sucesión sin más que sustituir n por los números naturales. Así, tendríamos:

$$a_1 = 1^2 + 3 = 4$$

$$a_2 = 2^2 + 3 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 = 12$$

$$a_4 = 4^2 + 3 = 19$$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$

$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. <u>Por una ley de recurrencia</u>:

Es una expresión que permite obtener un término a partir de los anteriores

Ejemplo:

- La sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

conocida como sucesión de Fibonacci se obtiene con la siguiente ley de recurrencia:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Es decir, cada término, salvo los dos primeros, se obtiene como suma de los dos anteriores.

Actividades resueltas

- *Sea la sucesión de término general:* $a_n = 2n + 3$.

  Sus cinco primeros términos son: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, $a_5 = 13$

- *Dada la sucesión en forma recurrente:* $a_1=1$, $a_n = a_{n-1} + 3$

  Sus cuatro primeros términos son:

$a_1 = 1$ (ya viene dado),

$a_2 = 1 + 3 = 4$,

$a_3 = 4 + 3 = 7$,

$a_4 = 7 + 3 = 10$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 2n^2+1$

b) $b_n = \dfrac{4n-1}{3n}$

c) $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$

d) $d_1 = 2$, $d_2 = 5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1,\ldots\}$

b) $\{0, 3, 8, 15, 24, 35,\ldots\}$

c) $\{2, 4, 6, 8, 10,\ldots\}$

d) $\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{7}, \dfrac{9}{8}, \ldots\right\}$

6. En una sucesión el primer término es 2 y los demás se obtienen sumando 4 al término anterior. Hallar los 6 primeros términos de la sucesión.

7. Un satélite artificial se puso en órbita a las 17 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 87 minutos. A) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta. B) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta *n*-ésima. C) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior. D) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de otra órbita anterior. E) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 20 días más tarde a las 14 horas?

Nº de órbitas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Hora en la que la ha completado						

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Ejemplo:

- *Alicia tiene en siete días un examen de Matemáticas. Decide prepararlo haciendo cada día tres ejercicios más que el día anterior. Empieza hoy haciendo dos ejercicios. Si escribimos los ejercicios que va haciendo Alicia a medida que pasan los días, son:* 2, 5, 8, 11, 14,...

Observamos que los términos de la sucesión van aumentando en una cantidad constante: 3. Este tipo de sucesiones se llaman *progresiones aritméticas*.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante. A esta constante se le llama **diferencia de la progresión** y se suele denotar con la letra *d*.

De otra forma, en una progresión aritmética se verifica:

$$a_{i+1} - a_i = d$$

siendo *i* cualquier número natural

Es decir, cada término se obtiene sumando al anterior la diferencia, *d*:

$$a_{i+1} = a_i + d$$

Ejemplo:

- La sucesión formada por los números naturales: {1, 2, 3, 4, 5,...} es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 1 al término anterior.

Actividades resueltas

- Si $a_1 = 3$ y $d = 2$, vamos a ver cómo se escriben los cinco primeros términos de la progresión aritmética:

  $a_1 = 3$,

  $a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5$

  $a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7$

  $a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9$

  $a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$

Actividades propuestas

8. Señala razonadamente si la siguiente sucesión es una progresión aritmética:

{1, 10, 100, 1000, 100000, ...}.

9. Calcula los tres primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el primero es 1 y la diferencia es –2.

2.1. Término general de una progresión aritmética

Una progresión aritmética, al igual que ocurre con todas las sucesiones, queda perfectamente definida si conocemos su término general. Vamos a calcularlo utilizando la definición que hemos visto de progresión aritmética y suponiendo conocidos el primer término a_1 y la diferencia de la sucesión, d.

a_1 dado

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

....

De forma general:

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)\cdot d + d = a_1 + (n-1)\,d$

Por tanto, el **término general de una progresión aritmética** es:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\,d}$$

Generalizando este resultado, podemos calcular el término general de una progresión aritmética conociendo d y otro término de la progresión, no necesariamente el primero:

Más general, el **término general de una progresión aritmética** es:

$$\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)\,d}$$

Siendo a_k el término de la progresión que ocupa el lugar k.

NOTAS

1. **Dependiendo del valor de *d*, nos podemos encontrar con distintos tipos de progresiones aritméticas:**
   a) <u>Si $d > 0$,</u> la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que los anteriores. Por ejemplo: {2, 4, 6, 8, …}
   b) <u>Si $d < 0$,</u> la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que los anteriores. Por ejemplo: {12, 9, 6, 3, …}
   c) <u>Si $d = 0$,</u> la progresión es constante, es decir, todos sus términos son iguales. Por ejemplo: {4, 4, 4, 4, …}

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. Dependiendo de los datos que tengamos, calcularemos el término general de una progresión aritmética de una forma u otra:

a) Si conocemos a_1 y d, hemos visto que: $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d$

b) Si conocemos un término cualquiera a_i y d, sabemos que: $a_n = a_k + (n - k)\, d$

c) Si conocemos dos términos cualesquiera a_r y a_s, nos faltaría la diferencia d para poder aplicar la fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

$$a_n = a_r + (n - r)\cdot d \quad \text{y que} \quad a_n = a_s + (n - s)\cdot d$$

podemos despejar d en función de r, s, a_r y a_s y nos queda: $d = \dfrac{a_r - a_s}{r - s}$

Actividades resueltas

- *Hallar el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es* 7 *y su diferencia también es* 7.

  Basta con sustituir en la fórmula dada: $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d = 7 + (n - 1)7 = 7 + 7n - 7 = 7n$.

- *Calcula el término que ocupa el lugar* 15 *en una progresión aritmética cuyo primer término es* 2 *y la diferencia es* 3.

  En este caso, $a_{15} = a_1 + (15 - 1)\cdot d = 2 + 14\cdot 3 = 2 + 42 = 44$.

- *Calcula el primer término de una progresión aritmética con* $a_5 = 6$ *y* $d = -2$.

  $a_5 = a_1 + (5 - 1)\cdot d$. Despejamos $a_1 = a_5 - 4d = 6 - 4\cdot(-2) = 14$.

Actividades propuestas

10. Dada una progresión aritmética dos de cuyos términos son: $a_3 = 4$ y $a_{10} = 18$:

a) Calcula su diferencia.

b) Calcula su término general.

11. Calcula el primer término de una progresión aritmética con diferencia 2 y $a_{30} = 60$.

12. ¿Cuál es el término general de una progresión aritmética con $a_{22} = 45$ y $d = 3$?

13. Los lados de un pentágono están en progresión aritmética de diferencia 5. Sabiendo además que su perímetro es 65, calcula el valor de los lados.

14. Calcula los 5 primeros términos de una progresión aritmética de primer término 2 y de diferencia 3. Represéntalos gráficamente. Observa que su representación gráfica es un conjunto de puntos aislados que están sobre una recta.

15. Calcula la expresión general de las progresiones aritméticas:

a) De diferencia $d = 2{,}5$ y de primer término 2.
b) De diferencia $d = -2$ y de primer término 0.
c) De diferencia $d = 1/3$ y de segundo término 5.
d) De diferencia $d = 4$ y de quinto término 1.

16. ¿Cuántos múltiplos de 7 están comprendidos entre el 4 y el 893?

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Suma de los términos de una progresión aritmética

En una progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes es constante.

Es decir, si los subíndices naturales p, q, r y s verifican que $p + q = r + s$, entonces: $a_p + a_q = a_r + a_s$

La *demostración* de esta propiedad es muy sencilla:

$$a_p + a_q = a_1 + d\cdot(p - 1) + a_1 + d\cdot(q - 1) = 2a_1 + d\cdot(p + q - 2)$$
$$a_r + a_s = a_1 + d\cdot(r - 1) + a_1 + d\cdot(s - 1) = 2a_1 + d\cdot(r + s - 2)$$

Y como: $p + q = r + s$, entonces: $a_p + a_q = a_r + a_s$

Queremos calcular la suma de los n términos de una progresión aritmética, S_n. Es decir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la suma, tenemos que:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots\dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando estas dos igualdades término a término obtenemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots\dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como se observa, los subíndices correspondientes a cada par de términos entre paréntesis suman $n+1$, por lo que la suma de sus términos será siempre la misma, entonces:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots\dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n\cdot(a_1 + a_n)$$

Despejando S_n :

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

La **suma** de los n primeros términos de una **progresión aritmética** viene dada por:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}.$$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Suma los* 30 *primeros términos de la progresión aritmética:* $a_n = \{17, 13, 9, 5, 1, ...\}$.

  Observamos que $d = -4$. Para aplicar la fórmula de la suma tenemos que calcular primero el término que ocupa el lugar 30, a_{30}:

  $a_{30} = a_1 + (n-1)d = 17 + (30-1)\cdot(-4) = 17 + 29\cdot(-4) = -99$

  Entonces: $S_{30} = 30 \cdot \frac{17+(-99)}{2} = -1230$

- *Halla la suma de los números impares menores que* 1000.

  Tenemos que tener en cuenta que los números impares forman una progresión aritmética de diferencia 2 y además: $a_1 = 1$, $n = 500$, $a_{500} = 999$

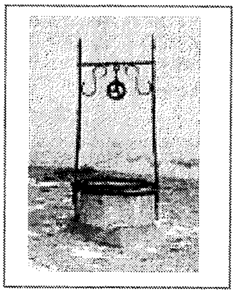
  Entonces: $S_{500} = 500 \cdot \frac{1+999}{2} = 250000$.

Actividades propuestas

17. Suma los 10 primeros términos de la progresión aritmética: $\{-5, 4, 13, 22, 31, 40, ...\}$

18. Halla la suma de los 50 primeros múltiplos de 3.

19. En una sucesión aritmética de un número impar de términos el central vale 12, ¿cuánto valdrá la suma del primero más el último?



20. El dueño de un pozo contrata a un zahorí para conocer la profundidad a la que se encuentra el agua y éste dictamina que a 5 m hay agua en abundancia. Pide un presupuesto a un contratista, que le dice que el primer metro le costará 50 euros y por cada medio metro más 6 euros más que por el medio metro anterior. ¿Cuánto le costará el pozo si se cumplen las predicciones?

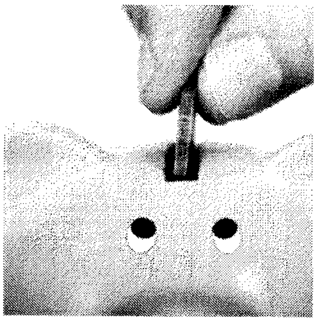
21. Antonio se ha comprado un móvil, pero no puede pagarlo al contado. Paga 60 euros cada semana, pero el vendedor le sube 5 euros cada semana en concepto de pago aplazado. Logra pagarlo en 10 semanas. ¿Cuánto le costó? ¿Cuánto pagó de más? ¿Qué porcentaje supone este recargo sobre el precio de venta?

22. Un nadador se entrena en una piscina de 50 m y quiere controlar las pérdidas de velocidad por cansancio. Cronometra en cinco días consecutivos los tiempos que tarda en hacer 2, 5, 8, 11, 14 largos. A) Halla el término general de la sucesión a_n que da los metros recorridos en el día n. B) ¿Cuántos metros habrá nadado en dichos cronometrajes?

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplo:



- *Un padre planea meter en una hucha 1 € el día que su hijo recién nacido cumpla un año y duplicar la cantidad en cada uno de sus cumpleaños.*

  Es decir, la sucesión cuyos términos son el dinero que mete en la hucha cada año es: {1, 2, 4, 8, 16,…}.

Observamos que los términos de la sucesión van aumentando de forma que cada término es el anterior multiplicado por 2. Este tipo de sucesiones se llaman progresiones geométricas.

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina **razón de la progresión** y se suele denotar con la letra *r*. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ siendo *i* un número natural y siempre que a_i sea distinto de cero.

O lo que es lo mismo, cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón *r*:

$$a_{i+1} = a_i \cdot r$$

Ejemplo:

- La sucesión: {1, 3, 9, 27, 81,…} es una progresión geométrica, ya que tomando dos términos cualesquiera consecutivos, siempre se obtiene el mismo cociente, que es 3, razón de la progresión.

$$3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = 81 : 27 = 3$$

3.1. Término general de una progresión geométrica

Una progresión geométrica, por ser una sucesión, queda totalmente definida si conocemos su término general. Vamos a obtenerlo sin más que aplicar la definición de progresión geométrica:

$a_2 = a_1 \cdot r$
$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$
$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$
$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$
………
$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

Por tanto, el **término general de una progresión geométrica** es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Generalizando este resultado, podemos calcular el término general de una progresión geométrica conociendo *r* y otro término de la progresión, no necesariamente el primero:
Más general, el **término general de una progresión geométrica** es:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

siendo a_k el término de la progresión que ocupa el lugar *k*.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- La sucesión $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ es una progresión geométrica.

NOTAS

1. **Dependiendo del valor de *r*, nos podemos encontrar con distintos tipos de progresiones geométricas:**

   a) <u>Si $r > 1$</u>, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que los anteriores. Por ejemplo: {2, 4, 8, 16, ...}

   b) <u>Si $0 < r < 1$</u>, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que los anteriores. Por ejemplo: {90, 30, 10, 10/3, 10/9, ...}

   c) <u>Si $r < 0$</u>, la progresión es alternada, es decir, sus términos van cambiando de signo según el valor de *n*. Por ejemplo: {–2, 4, –8, 16, ...}

   d) <u>Si $r = 0$,</u> la progresión es la progresión formada por ceros a partir del segundo término. Por ejemplo: {7, 0, 0, 0, }

   e) <u>Si $r = 1$</u>, la progresión es la progresión constante formada por el primer término: {2, 2, 2, 2 ,...}

2. **Dependiendo de los datos que tengamos, calcularemos el término general de una progresión geométrica de una forma u otra:**

   a) Si conocemos a_1 y r, hemos visto que: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

   b) Si conocemos un término cualquiera a_k y r, sabemos que: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$

   c) Si conocemos dos términos cualesquiera a_p y a_q, con a_p no nulo, nos falta conocer la razón r para poder aplicar la fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

   $$a_n = a_p \cdot r^{n-p} \quad \text{y que} \quad a_n = a_q \cdot r^{n-q}$$

   podemos despejar r en función de p, q, a_p y a_q y nos queda: $r = \sqrt[q-p]{\frac{a_q}{a_p}}$

Actividades resueltas

- *Hallar el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es* 7 *y su razón también es* 7.

  Basta con sustituir en la fórmula dada: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 7 \cdot 7^{n-1} = 7^n$.

- *Calcula el término que ocupa el lugar* 5 *en una progresión geométrica cuyo primer término es* 2 *y razón* 3.

  En este caso, $a_5 = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$.

- *Calcula el primer término de una progresión geométrica con* $a_3 = 6$ y $r = -2$.

  Despejamos a_1 de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ y tenemos: $a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$.

  Para $n = 3$, tenemos: $a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{6}{(-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

23. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 27 y el cuarto es 8.

24. El cuarto término de una progresión geométrica es 1/9 y la razón 1/3. Halla el primer término.

25. Halla el sexto término de la siguiente progresión geométrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\}$

26. Dada una progresión geométrica dos de cuyos términos son: $a_3 = -8$ y $a_{11} = -2048$

a) Calcula su razón.

b) Calcula su término general.

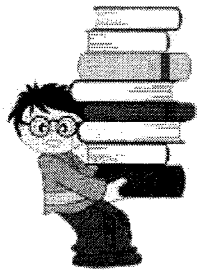
27. Cierta clase de alga, llamada *clorella*, se reproduce doblando su cantidad cada dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su cantidad, y así sucesivamente. Si se tiene en el momento inicial un kilo, al cabo de dos horas y media hay dos kilos. A) Haz una tabla de valores en la que indiques para cada periodo de reproducción el número de kilos de *clorella*. B) Indica el término general. C) Al cabo de 4 días, han transcurrido 40 periodos, ¿consideras posible este crecimiento?

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Suma de los términos de una progresión geométrica

A) Suma de un número limitado de términos consecutivos de una progresión geométrica

Ejemplo:



- Juan ha comprado 20 libros, por el 1º ha pagado 1 €, por el 2º, 2 €, por el 3º, 4 €, por el 4º, 8 € y así sucesivamente. ¿Cómo podemos saber lo que ha pagado en total sin necesidad de hacer la suma?

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$. Se trataría de calcular: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$.
Vamos a verlo en general, para una progresión geométrica cualquiera:

Queremos calcular: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
Para ello, multiplicamos esta igualdad por r:

$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$

Pero como: $a_2 = r \cdot a_1$

$a_3 = r \cdot a_2$

$a_4 = r \cdot a_3$

....

$a_n = r \cdot a_{n-1}$

La igualdad anterior queda:

$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$

Restando:

$$\begin{array}{rl} r \cdot S_n = & a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n \\ - \quad S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \end{array}$$

$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$

$(r-1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1$ $\quad S_n = \dfrac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$ siempre que $r \neq 1$, y como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Entonces:

$S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ siempre que $r \neq 1$.

La **suma** de los n primeros términos de una progresión **geométrica** viene dada por:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \text{ siempre que } r \neq 1.$$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Se considera $r \neq 1$ ya que si $r = 1$ la progresión es la progresión constante formada por el primer término: $\{a_1, a_1, a_1, a_1,...\}$ y $S_n = n \cdot a_1$

Analicemos la suma según los distintos valores de r:

a) Si $|r| > 1$, los términos en valor absoluto crecen indefinidamente y el valor de S_n viene dado por la fórmula anterior.

b) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos cuando n es grande se aproxima a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$, ya que si en $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$, elevamos la razón $|r| < 1$ a una potencia, cuanto mayor sea el exponente n, menor será el valor de r^n y si n es suficientemente grande, r^n se aproxima a 0. Por eso,

$$S_n \approx \frac{a_1 \cdot (-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

c) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1,...\}$ y S_n es igual a cero si n es par, e igual a a_1 si n es impar. La suma de la serie oscila entre esos dos valores.

Actividades resueltas

- *Hallar la suma de los 11 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es –2 y la razón –3.*

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{(-2)\left[(-3)^{11} - 1\right]}{-3-1} = -88574.$$

- *Hallar la suma de los 7 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el séptimo término es 20480, el primero es 5 y la razón es 4.*

Ahora utilizamos la fórmula: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$

Sustituyendo:

$$S_7 = \frac{r\,a_7 - a_1}{r-1} = \frac{20480 \cdot 4 - 5}{4-1} = 27305.$$

Actividades propuestas

30. Un agricultor en su granja tiene 59049 litros de agua para dar de beber a los animales. Un día utilizó la mitad del contenido, al siguiente la mitad de lo que le quedaba y así sucesivamente cada día. ¿Cuántos litros de agua utilizó hasta el sexto día?

31. Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 5$ y $r = ½$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

B) Suma de un número ilimitado de términos consecutivos de una progresión geométrica

¿Qué ocurrirá si repetimos el proceso anterior indefinidamente? Es decir, ¿qué ocurrirá si sumamos un número ilimitado de términos?

Dependiendo del valor de *r* será posible o no obtener la suma de un número ilimitado de términos:

a) Si $r = 1$, la progresión es la progresión constante formada por el primer término: $\{a_1, a_1, a_1, a_1,...\}$ y si a_1 es positivo la suma de los términos será cada vez mayor (si fuera a_1 negativo sería la suma cada vez mayor en valor absoluto, pero negativa). Por tanto, si el número de términos es ilimitado, esta suma será infinita.

b) Si $|r| > 1$, los términos crecen indefinidamente y el valor de S_n para un número ilimitado de términos, también será infinito.

c) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos se aproxima cuando *n* es grande a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$.

   Observamos que la suma no depende del número de términos, ya que al hacerse cada vez más pequeños, llega un momento en que no se consideran.

d) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1,...\}$ y S_n es igual a cero si *n* es par, e igual a a_1 si *n* es impar. La suma de la serie oscila entre esos dos valores para un número finito de términos. Para un número de términos ilimitado no sabemos si es par o impar, con lo que la suma no se puede realizar a no ser que $a_1 = 0$, caso en que $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. En el resto de los casos decimos que la suma de infinitos términos no existe pues su valor es oscilante.

e) Si $r < -1$, los términos oscilan entre valores positivos y negativos, creciendo en valor absoluto. La suma de sus infinitos términos no existe pues su valor también es oscilante.

En resumen,

La **suma** de un número **ilimitado** de términos de una **progresión geométrica** sólo toma un valor finito si $|r| < 1$, y entonces viene dada por: $S = \frac{a_1}{1-r}$ En el resto de los casos, o vale infinito, o no existe pues oscila.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica cuyo primer término es 4 y la razón 1/2.*

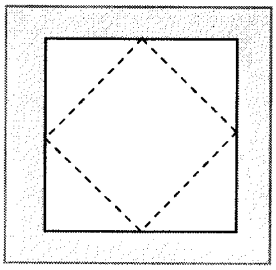
$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

- *En una progresión geométrica la razón es 1/4 y la suma de todos sus términos es 8. ¿Cuánto vale el primer término?*

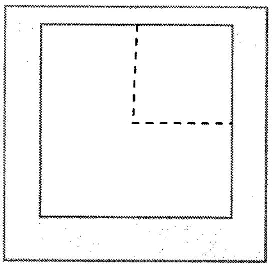
Despejamos a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$ y: $a_1 = S\,(1 - r) = 8 \cdot (1 - 1/4) = 6$

Actividades propuestas

32. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,...



33. Tenemos en la mano un cuadrado de área 1. Cortamos las cuatro esquinas por los puntos medios de los lados. El nuevo cuadrado, ¿qué área tiene? Dejamos los recortes encima de la mesa. ¿Qué área de recortes hay sobre la mesa? Con el nuevo cuadrado que tenemos en la mano efectuamos la misma operación de cortar las cuatro esquinas y dejarlas sobre la mesa, y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? Halla la suma de las infinitas áreas de recortes así obtenidas.



34. De nuevo tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayo lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crecen o disminuyen? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF