INSTITUTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EL ESCORIAL

INSTITUTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EL ESCORIAL	CALIFICACIÓN
Alumno/a______________________ Curso _____ Grupo ______	
Matemáticas I. 1º BACH. EXAMEN FINAL 3ª EV. 22-MAYO-2018	

Ejercicio nº 1.- *(1,25 puntos)*

Halla los vértices, los focos y la excentricidad de la siguiente cónica: $4x^2 + 25y^2 - 16x + 200y + 316 = 0$
Represéntala.

Solución:

$$4x^2 + 25y^2 - 16x + 200y + 316 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 - 16x + 16 + 25y^2 + 200y + 400 + 316 - 16 - 400 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (2x-4)^2 + (5y+20)^2 = 100 \rightarrow [2(x-2)]^2 + [5(y+4)]^2 = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x-2)^2 + 25(y+4)^2 = 100 \rightarrow \frac{4(x-2)^2}{100} + \frac{25(y+4)^2}{100} = 1 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$$

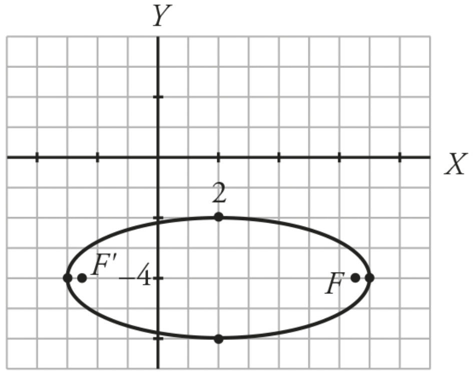
Es una elipse de centro (2, −4).

Semiejes y semidistancia focal: $a = 5$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

Vértices: (7, −4); (−3, −4); (2, −2); (2, −6)

Focos: $(2+c, -4) = (2+\sqrt{21}, -4); (2-c, -4) = (2-\sqrt{21}, -4)$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$



Ejercicio nº 2.- ***(1,25 puntos)***

Dados los puntos $A(0, 0)$ y $B(3. 6)$, hallar el lugar geométrico de los puntos C tales que el triángulo ABC cumpla que el lado AC mida el doble que el lado BC.

Solución:

Sea $C(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

Longitud del lado $AC = d(A,C) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Longitud del lado $BC = d(B,C) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$

Se debe cumplir: $d(A, C) = 2 \times d(B, C)$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$$

$$x^2 + y^2 = 4\left[(x-3)^2 + (y-6)^2\right]$$

$x^2+y^2= 4(x^2- 6x + 9 + y^2- 12y + 36)$

$x^2+y^2= 4x^2- 24x + 4y^2- 48y + 180$

$3x^2- 24x + 3y^2- 48y + 180 = 0$

$x^2- 8x + y^2- 16y + 60 = 0 \quad \rightarrow$ Es una circunferencia

$(x^2- 8x + 16) + (y^2- 16y + 64) = 20$

$(x - 4)^2+ (y - 8)^2= 20$

El lugar geométrico buscado es la circunferencia de centro $(4, 8)$ y radio $r = 2\sqrt{5}$

Ejercicio nº 3.- ***(1 punto)***

Representa gráficamente:

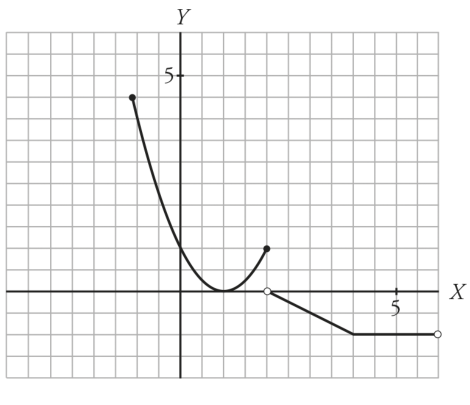
$$y = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ \dfrac{-x}{2} + 1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \\ -1 & \text{si} \quad 4 < x < 6 \end{cases}$$

Solución:

$y = (x - 1)^2$ si $-1 \le x < 2$, es un trozo de parábola con vértice en (1,0).

$y = \dfrac{-x}{2} + 1$ si $2 \le x \le 4$ es un trozo de recta, un segmento entre los puntos $(2, 0)$ y $(4, -1)$, ambos incluidos

$y = -1$ si $4 < x < 6$ es un segmento horizontal.



Ejercicio nº 4.- ***(1 punto)***

Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones:

a) $y = 2 \cdot e^{-x}$

b) $y = \ln x - 1$

Solución:

a) La función no tiene asíntotas verticales, puesto que es continua en R

Tiene una asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} 2 \cdot e^{-x} = 0$$

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} 2 \cdot e^{-x} = 0$$

b) La función está definida para $x > 0$

Tiene una asíntota vertical en $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln x - 1) = -\infty$$

Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$$

Ejercicio nº 5.- ***(1,5 puntos)***

Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

El primer tramo de función $y = \dfrac{1}{x+2}$ no está definido en $x = -2$, valor que pertenece a la semirrecta $x < -1$. Luego $f(x)$ es discontinua en $x = -2$.

En los otros dos tramos, hay una función cuadrática y una función constante, ambas continuas en todo R.

Estudiamos la continuidad de los puntos de ruptura:

· $x = -1$:

$$\left.\begin{aligned} & f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 2 \\ & \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-1+2} = 1 \\ & \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 - x) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}\right\}$$

No existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, luego la función es discontinua en $x = -1$.

Se produce un salto finito en $x = -1$.

$\cdot$ $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - x\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

Luego $f(x)$ es continua en todo R excepto en $x = -2$ y $x = -1$.

Ejercicio nº 6.- ***(1,5 puntos)***

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln\left(tg\left(1 + x^2\right)\right)$

b) $f(x) = \left(x^2 - 1\right) e^{3x+1}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}}$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{\left(1 + tg^2\left(1 + x^2\right)\right) \cdot 2x}{tg\left(1 + x^2\right)} = \dfrac{2x + 2x\, tg^2\left(1 + x^2\right)}{tg\left(1 + x^2\right)}$

b) $f'(x) = 2x\, e^{3x+1} + 3\left(x^2 - 1\right) e^{3x+1} = \left(2x + 3x^2 - 3\right) e^{3x+1} = \left(3x^2 + 2x - 3\right) e^{3x+1}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}}} \cdot \dfrac{2x(x + 2) - \left(x^2 - 1\right)}{(x + 2)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x + 2}{x^2 - 1}} \cdot \dfrac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x + 2)^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{x + 2}\left(x^2 + 4x + 1\right)}{2\sqrt{x^2 - 1}\,(x + 2)^2}$

Ejercicio nº 7.- ***(1 punto)***

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3x$ que tenga pendiente -7.

Solución:

• $f'(x) = 4x - 3$

• La pendiente de la recta es $m = -7$ $\rightarrow$ $4x - 3 = -7$ $\rightarrow$ $x = -1$

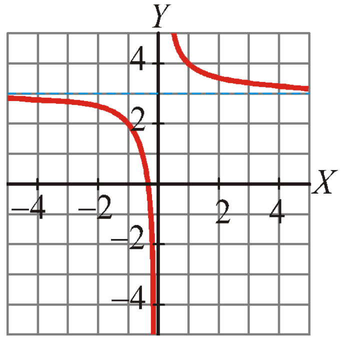
• Cuando $x = -1$, $y = 5$.

• La recta será: $y = 5 - 7(x + 1) = 5 - 7x - 7 = -7x - 2$

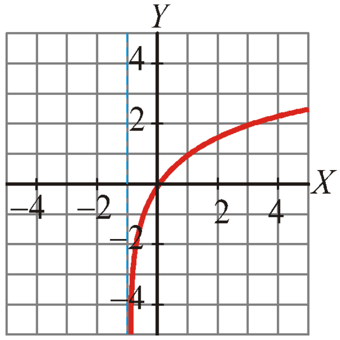
<u>Ejercicio nº 8.-</u> (1,5 puntos)

Asocia cada una de estas gráficas con su correspondiente ecuación:

I)



II)



a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

b) $y = \sqrt{3+x}$

c) $y = \dfrac{1}{x} + 3$

d) $y = \sqrt{3-x}$

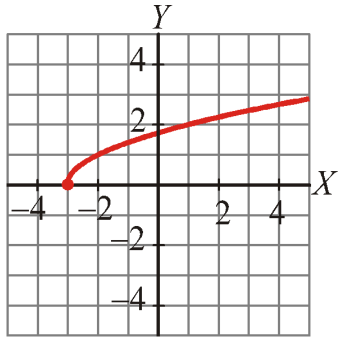
e) $y = 2^{x-1}$

f) $y = 2^{x} - 1$

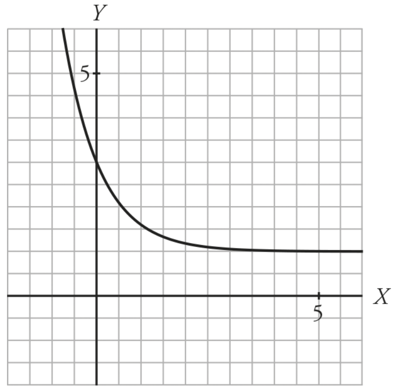
g) $y = \log_2 (x + 1)$

h) $y = 1 + 2 \times 0{,}3^{x}$

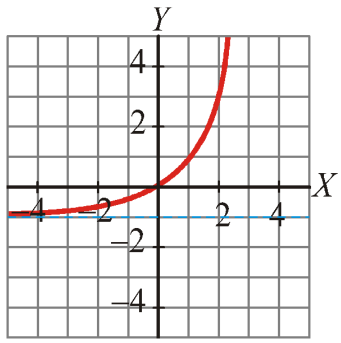
III)



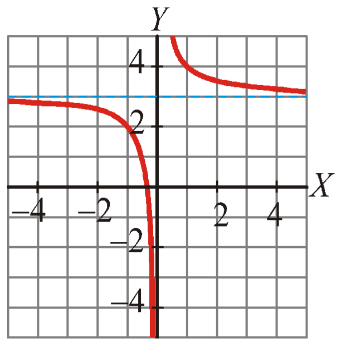
IV)



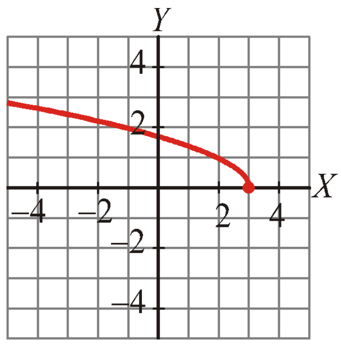
V)



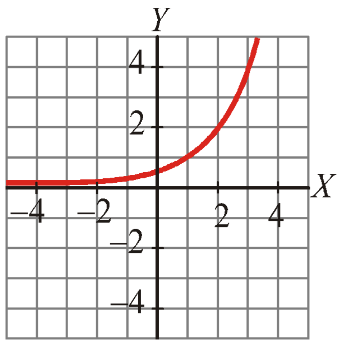
VI)



VII)



VIII)



Solución:

a) VI	e) VIII
b) III	f) V
c) I	g) II
d) VII	h) IV