INSTITUTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EL ESCORIAL Alumno/a____________________ Curso _____ Grupo ______ Matemáticas I. 1º BACH. RECUPERACIÓN 2ª EV. 31-MAYO-2018	CALIFICACIÓN

Ejercicio nº 1.- *(1,5 puntos)*

Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\cos 2x + \cos^2 x = 2$$

Solución:

$$\cos 2x + \cos^2 x = 2 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 2$$

$$2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \quad \rightarrow \quad 2\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 2$$

$$2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2 \quad \rightarrow \quad 3\cos^2 x = 3$$

$$\cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0° + 360°k \\ \\ \cos x = -1 \quad \rightarrow \quad x = 180° + 360°k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2\pi k \\ x = \pi + 2\pi k \end{cases} \quad \text{siendo } k \in ¢$$

Ejercicio nº 2.- *(1 punto)*

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\cos(x + 45°) \cdot \cos(x - 45°) = \frac{1}{2}\cos 2x$$

Solución:

$$\cos(x + 45°) \cdot \cos(x - 45°) = (\cos x \cos 45° - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 45°)(\cos x \cos 45° + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 45°) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x) = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = \frac{1}{2}\cos 2x$$

Ejercicio nº 3.- *(1 punto)*

Calcula x para que el resultado de $\dfrac{(-2 + xi)(1 - i)}{-2i^{51}}$ sea un número real

Solución:

$$\frac{(-2 + xi)(1 - i)}{-2i^{51}} = \frac{(-2 + xi)(1 - i)}{-2 \cdot (-1)} = \frac{-2 + 2i + xi - xi^2}{2i} = \frac{(-2 + 2i + xi + x)\,i}{2i \cdot i} = \frac{-2i + 2i^2 + xi^2 + xi}{-2}$$

$$= \frac{-2i - 2 - x + xi}{-2} = \frac{x + 2}{2} + \frac{(2 - x)}{2}i$$

Para que sea un número real, la parte imaginaria debe ser nula $\frac{2-x}{2}=0 \rightarrow x=2$

Por tanto, para $x = 2$, el resultado es un número real

<u>Ejercicio nº 4.-</u> (1,5 puntos)

Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el afijo $z = 1 + \sqrt{3}i$. Calcula los otros vértices y el perímetro de la figura.

Solución:

Expresamos el afijo $z = 1 + \sqrt{3}i$ en forma polar:

$|z| = \sqrt{1+3} = 2; \quad tg\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60° \rightarrow z = 2_{60°}$

Para hallar los otros vértices multiplicamos z por $1_{\frac{360°}{5}} = 1_{72°}$:

$z_2 = 2_{60°} \cdot 1_{72°} = 2_{132°} = 2(cos\ 132° + i\ sen\ 132°) = -1{,}34 + 1{,}49i$

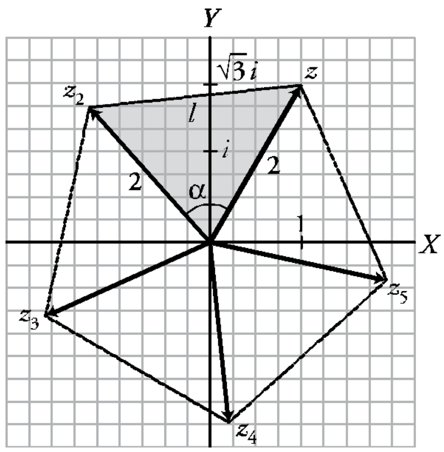
$z_3 = 2_{132°} \cdot 1_{72°} = 2_{204°} = 2(cos\ 204° + i\ sen\ 204°) = -1{,}83 - 0{,}81i$

$z_4 = 2_{204°} \cdot 1_{72°} = 2_{276°} = 2(cos\ 276° + i\ sen\ 276°) = 0{,}21 - 1{,}99i$

$z_5 = 2_{276°} \cdot 1_{72°} = 2_{348°} = 2(cos\ 348° + i\ sen\ 348°) = 1{,}96 - 0{,}42i$

Los otros cuatro vértices del pentágono son:

(−1,34; 1,49); (−1,83; −0,81); (0,21; −1,99) y (1,96; −0,42)



Para calcular el perímetro necesitamos calcular el lado del pentágono. Para ello, aplicamos el teorema del coseno al triángulo sombreado, sabiendo que α = 72°.

$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot cos\ 72° \rightarrow l^2 = 8 - 8\ cos\ 72° \rightarrow l$ - 2,35 cm

Perímetro = $5 \cdot l$ = 11,75 cm

<u>Ejercicio nº 5.-</u> (1,5 puntos)

Dados los vectores $\vec{x} = (4, 1)$, $\vec{y} = (-1, 2)$ y $\vec{z} = (1, k)$, halla:

a) El valor de k para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ sean perpendiculares.

b) El ángulo que forman $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

c) Dos vectores perpendiculares a $\vec{y}$ cuyo módulo sea 3.

Solución:

a) Para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero:

$\vec{x}\cdot\vec{z} = (4, 1)\cdot(1, k) = 4 + k = 0 \;\rightarrow\; k = -4$

b) $\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} = \dfrac{-4+2}{\sqrt{4^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{-2}{\sqrt{85}} = -0,217 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = 102^\circ\, 31'\, 44''$

c) Como $|\vec{y}| = \sqrt{5}$, los dos vectores unitarios perpendiculares a $\vec{y}$ son:

$\vec{u}_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y $\vec{u}_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Por tanto, los dos vectores perpendiculares a $\vec{y}$ de módulo 3 son:

$\vec{v}_1 = 3\vec{u}_1 = \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$ y $\vec{v}_2 = 3\vec{u}_2 = \left(-\dfrac{6}{\sqrt{5}}, -\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$

***<u>Ejercicio nº 6.-</u>* (1 punto)**

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ y el ángulo que forman es de 60°, halla $|\vec{a}-\vec{b}|$ y $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Solución:

Calculamos $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 5\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = 5\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2} = 5$

Entonces:

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 5^2 - 2\cdot 5 + 2^2 =$

$= 25 - 10 + 4 = 19 \;\rightarrow\; |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{19}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 25 + 10 + 4 = 39 \;\rightarrow\; |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{39}$

Por tanto, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{19}$ y $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{39}$

***<u>Ejercicio nº 7.-</u>* (1 punto)**

De todas las rectas que pasan por el punto $(-1, 2)$, halla las que distan $\sqrt{10}$ unidades del punto $P(3, 4)$.

Solución:

El haz de rectas que pasa por el punto (−1, 2) es:

$y - 2 = m(x + 1) \rightarrow y = mx + m + 2 \rightarrow mx - y + m + 2 = 0$

Queremos averiguar las rectas, *r,* de dicho haz que cumplen

$$dist(P, r) = \sqrt{10} \quad \rightarrow \quad \frac{|3m - 4 + m + 2|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10} \quad \rightarrow \quad |4m - 2| = \sqrt{10(m^2+1)}$$

$\rightarrow (4m - 2)^2 = 10(m^2 + 1) \rightarrow 16m^2 - 16m + 4 = 10\,m^2 + 10 \rightarrow 6m^2 - 16m - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3m^2 - 8m - 3 = 0$

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{8+10}{6} = \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{8-10}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones;

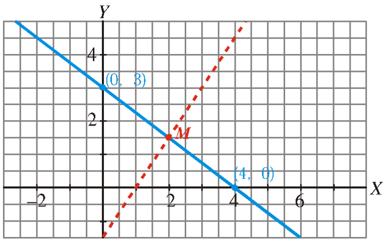
$r_1 : y - 2 = 3\,(x + 1)$

$r_2 : y - 2 = -\frac{1}{3}(x+1)$

Ejercicio nº 8.- (1,5 puntos)

Halla la ecuación de la mediatriz del segmento que tiene como extremo los puntos de corte de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ con los ejes de coordenadas.

Solución:



1.°) Hallamos los puntos de corte de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ con los ejes de coordenadas:

$x = 0 \rightarrow 4y - 12 = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow$ Punto (0, 3)

$y = 0 \rightarrow 3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow$ Punto (4, 0)

2.°) La mediatriz de un segmento es perpendicular a él y pasa por su punto medio.

El punto medio del segmento de extremos (0, 3) y (4, 0) es: $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$

La pendiente de la recta que une los puntos (0, 3) y (4, 0) es: $m = \frac{-3}{4}$

La pendiente de su perpendicular es: $\frac{-1}{-3/4} = \frac{4}{3}$

3.°) La ecuación de la mediatriz será:

$$y = \frac{3}{2} + \frac{4}{3}(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2} + \frac{4x}{3} - \frac{8}{3}$$

$$6y = 9 + 8x - 16 \quad \rightarrow \quad 8x - 6y - 7 = 0$$