

Alumno/a \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_

Matemáticas I. 1º BACH. Nº COMPLEJOS. VECTORES.

12-FEBRERO-2018

**Ejercicio nº 1.- (1,5 puntos)**Halla  $a$  y  $b$  para que:

$$\frac{(3+2i)^2 - 2i^5(2+ai)}{1+i} = b+3i$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{(3+2i)^2 - 2i^5(2+ai)}{1+i} &= \frac{(9+12i-4) - 2i(2+ai)}{1+i} = \\ &= \frac{5+12i-4i+2a}{1+i} = \frac{5+2a+8i}{1+i} = \frac{(5+2a+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \\ &= \frac{5+2a-(5+2a)i+8i+8}{1+1} = \frac{2a+13}{2} + \frac{3-2a}{2}i \end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad, debe ser:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2a+13}{2} &= b \\ \frac{3-2a}{2} &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema:  $a = -\frac{3}{2}$ ,  $b = 5$ **Ejercicio nº 2.- (1,5 puntos)**

Calcula:

$$\frac{(-1+i)^4 \cdot (\sqrt{3}-i)}{i^{20} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}$$

Solución:

Pasamos a forma polar  $z_1 = -1+i$ ,  $z_2 = \sqrt{3}-i$ ,  $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ :

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{tg } \alpha_1 = -1 \rightarrow \alpha_1 = 135^\circ \rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{135^\circ}$$

$$|z_2| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{tg } \alpha_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha_2 = 330^\circ \rightarrow z_2 = 2_{330^\circ}$$

$$|z_3| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \text{tg } \alpha_3 = \sqrt{3} \rightarrow \alpha_3 = 240^\circ \rightarrow z_3 = 1_{240^\circ}$$

Entonces:

$$\frac{(-1+i)^4 \cdot (\sqrt{3}-i)}{i^{20} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3} = \frac{(\sqrt{2}_{135^\circ})^4 \cdot 2_{330^\circ}}{1 \cdot (1_{240^\circ})^3} = \frac{4_{180^\circ} \cdot 2_{330^\circ}}{1_{0^\circ}} = 8_{510^\circ} = 8_{150^\circ} =$$

$$= 8(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -4\sqrt{3} + 4i$$

### Ejercicio nº 3.- (1,5 puntos)

Halla  $\sqrt[5]{-1}$  e interpretagráficamente las soluciones.

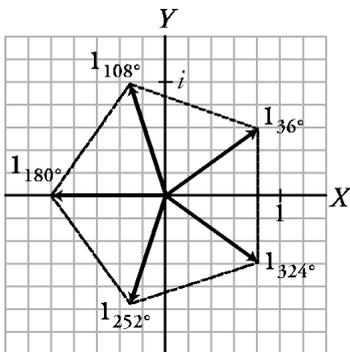
Solución:

$$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ + 360^\circ k}{5}} = 1_{36^\circ + 72^\circ k} ; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las cinco raíces son:

$$\begin{cases} 1_{36^\circ} ; 0,81 + 0,59i \\ 1_{108^\circ} ; -0,31 + 0,95i \\ 1_{180^\circ} = -1 \\ 1_{252^\circ} ; -0,31 - 0,95i \\ 1_{324^\circ} ; 0,81 - 0,59i \end{cases}$$

Interpretación gráfica:



Los afijos de las raíces quintas ocupan los vértices de un pentágono regular.

**Ejercicio nº 4.- (1,5 puntos)**

Dados los vectores  $\vec{u}(2, -1)$ ,  $\vec{v}\left(\frac{1}{3}, 2\right)$  y  $\vec{w}(-1, 3)$ , calcula:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b)  $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w}$

c)  $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$

Solución:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -1) \cdot \left(\frac{1}{3}, 2\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot 2 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$

b)  $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(2(2, -1) + 3\left(\frac{1}{3}, 2\right)\right) \cdot (-1, 3) = ((4, -2) + (1, 6)) \cdot (-1, 3) =$   
 $= (5, 4) \cdot (-1, 3) = 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = -5 + 12 = 7$

c)  $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{u} = ((2, -1) \cdot (-1, 3))(2, -1) = (2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3)(2, -1) = (-2 - 3)(2, -1) =$   
 $= -5(2, -1) = (-10, 5)$

**Ejercicio nº 5.- (1 punto)**

Dados los vectores  $\vec{a}(1, x)$  y  $\vec{b}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ :

a) Calcula  $x$  para que  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean perpendiculares.

b) Halla dos vectores unitarios perpendiculares a  $\vec{b}$ .

Solución:

a) Para que  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow (1, x) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) = 0 \rightarrow \frac{3}{5} - \frac{4}{5}x = 0 \rightarrow 3 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4}$$

b) Un vector perpendicular a  $\vec{b}$  es  $\vec{c}(4, 3)$  cuyo módulo es  $|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ .

El vector  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  es un vector unitario perpendicular a  $\vec{b}$  y  $\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$  es el otro.

**Ejercicio nº 6.- (1 punto)**

**Prueba que si  $\vec{a}$  es perpendicular a  $\vec{b}$  entonces  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ .**

Solución:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

Por ser  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , el producto escalar de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  es cero  $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\text{Por tanto, } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot 0 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2.$$

**Ejercicio nº 7.- (2 puntos)**

**Halla  $m$  y  $n$  para que los vectores  $\vec{a}(m, -4)$  y  $\vec{b}(5, n)$  cumplan que  $\vec{a} + \vec{b}$  sea ortogonal a  $\vec{c}(1, 6)$  y  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}$ .**

Solución:

$$\vec{a} + \vec{b} = (m, -4) + (5, n) = (m + 5, n - 4)$$

Para que  $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{c}$ , debe ser:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow (m + 5, n - 4) \cdot (1, 6) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m + 5 + 6n - 24 = 0 \rightarrow m + 6n = 19$$

Para que  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}$ , debe ser:

$$\sqrt{(m + 5)^2 + (n - 4)^2} = \sqrt{37} \rightarrow (m + 5)^2 + (n - 4)^2 = 37$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} m + 6n = 19 \\ (m + 5)^2 + (n - 4)^2 = 37 \end{array} \right\} \rightarrow m = 19 - 6n$$
$$\rightarrow (24 - 6n)^2 + (n - 4)^2 = 37 \rightarrow 576 - 288n + 36n^2 + n^2 - 8n + 16 = 37$$

$$37n^2 - 296n + 555 = 0 \rightarrow n = \frac{296 \pm \sqrt{5476}}{74} = \frac{296 \pm 74}{74} = \begin{cases} n = \frac{370}{74} = 5 \\ n = \frac{222}{74} = 3 \end{cases}$$

$$\text{Si } n = 5 \rightarrow m = 19 - 30 = -11$$

$$\text{Si } n = 3 \rightarrow m = 19 - 18 = 1$$

Por tanto, hay dos soluciones:  $m_1 = 11$  y  $n_1 = 5$

$$m_2 = 1 \text{ y } n_2 = 3$$