58 EJERCICIOS de RECTAS y PLANOS 2º BACH.

NOTA: En los ejercicios de Geometría se recomienda comenzar, antes de nada, por:

- Imaginarse la situación; podemos ayudarnos, para ello, de bolígrafos (para representar rectas), la mesa o una hoja de papel (planos), una goma de borrar (puntos), etc.
- O bien, **procurar representar gráficamente**, de una forma aproximada, **la situación**. Esto último es lo más recomendable (aunque en la PAEG no se exija…).

A continuación, tendremos que preguntarnos, ¿qué nos piden?:

- **Si nos piden una recta: Tendremos que obtener**, a partir de los datos, **un punto de ella y un posible vector director**.
- **Si nos piden un plano:** Tendremos que decidir, en función de los datos, cuál de las dos determinaciones más usuales nos interesa más:

- Un punto del plano y un vector normal $\vec{n}_\pi$

- Un punto del plano y dos vectores direccionales.

Por último, **se recomienda** vivamente **comprobar** que las ecuaciones obtenidas satisfacen los datos y las condiciones del enunciado.

Ecuación de la recta:

1. **Razonar** si las siguientes situaciones pueden ser, o no, una posible determinación de una recta. Puede ser útil un dibujo:

a) Recta r // a otra r' y que pasa por un punto P exterior a ésta última.

b) Recta r que corta $\perp$ a otra r' y pasa por un punto P exterior a esta última.

c) Recta r $\perp$ a otra r' y que pasa por un punto P exterior a ésta última (Tener en cuenta que las rectas $\perp$ se pueden cortar o cruzar).

d) Recta r $\perp$ a un plano π y que pasa por un punto P.

e) Recta r // a un plano π y que pasa por un punto P exterior a dicho plano.

f) Recta r $\cap$ de dos planos π y π' no paralelos.

*(Sol: **a)** SÍ; **b)** SÍ; **c)** NO; **d)** SÍ; **e)** NO; **f)** SÍ)*

2. Dado el punto P(–1,1,2) y el vector $\vec{u}=(1,3,2)$, se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos (–3,–5,–2) y (2,10,6) pertenecen a la recta.

3. Dados los puntos A(1,–2,4) y B(3,2,10) se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos (1,2,3) y (2,1,0) pertenecen a la recta. *(Soluc: c) NO; NO)*

4. Con los datos del ejercicio anterior, hallar otras dos posibles formas paramétricas alternativas, y volver a hacer los apartados b y c.

5. Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de los ejes de coordenadas.

6. Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de la recta que corta al eje **y** a la altura de 3 unidades positivas y al **z** en 4 unidades positivas. Explicar gráficamente la solución.

7. La recta $\left.\begin{array}{l} x=2+2\lambda \\ y=0 \\ z=-3\lambda \end{array}\right\}$ corta a los ejes en dos puntos.

a) Hallar dichos puntos. Hacer un dibujo de la situación. *(Soluc: (2,0,0) y (0,0,3))*

b) Obtener el área del triángulo cuyos vértices son los dos puntos anteriores y el origen. Dibujar la situación. *(Soluc: 3 u^2)*

8. Un tetraedro tiene por vértices A(0,1,0), B(1,2,3), C(0,2,1) y el cuarto vértice está situado en determinado punto D de la recta $\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right\}$ de forma que su volumen es $\frac{5}{2}\,u^3$. Hallar dicho punto. *(Soluc: (8,1,1) y (-7,1,1))*

9. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(2,3,4), B(1,−1,5) y C(5,5,4). Hallar también las coordenadas del baricentro de dicho triángulo.

(Sol: M_a:(x−2)/2=(y−3)/−2=(z−4)/1; M_b:(x−1)/5=(y+1)/10=(z−5)/−2; M_c:(x−5)/7=(y−5)/8=(z−4)/−1; G(8/3,7/3,13/3))

10. *(**S**)* Determinar los valores de **m** para que los puntos A(m,2,−3), B(2,m,1) y C(5,3,−2) estén alineados y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene. *(Soluc: m=6)*

Ecuación del plano:

11. Razonar si las siguientes situaciones pueden constituir una posible determinación de un plano. Intentar hacer un dibujo aclaratorio:

a) Plano π que contiene a una recta r y a un punto P exterior a ésta.

b) Plano π que contiene a una recta r y a un punto P de ésta.

c) Plano $\pi \perp$ a una recta r y que pasa por un punto P.

d) Plano π // a otro π' y que contiene a un punto P exterior a éste último.

e) Plano π // a una recta r' y que contiene a un punto P exterior a ésta.

f) Plano π que contiene a dos rectas r y r' paralelas.

g) Plano π que contiene a dos rectas r y r' secantes.

h) Plano π que contiene a una recta r y es paralelo a otra r' que se cruza con la anterior (esto es, ambas rectas no se tocan).

i) Plano $\pi \perp$ a otro π' y que pasa por dos puntos P y Q.

*(Sol: **a)** SÍ; **b)** NO; **c)** SÍ; **d)** SÍ; **e)** NO; **f)** SÍ; **g)** SÍ; **h)** SÍ; **i)** SÍ, siempre y cuando no estén alineados $\perp$ al plano)*

12. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por el punto P(1,2,3) y los vectores $\vec{u}=(2,-1,5)$ y $\vec{v}=(3,2,4)$. *(Soluc: 2x−y−z+3=0)*

13. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por los puntos A(2,1,3), B(1,1,1) y C(5,1,8). ¿Era de prever el resultado? *(Soluc: y=1)*

14. Dados los puntos A(5,−1,−1), B(1,0,1) y C(−2,−3,0) se pide:

a) Hallar la ecuación paramétrica y general del plano que determinan. *(Soluc: x−2y+3z−4=0)*

b) Estudiar si los puntos (3,1,1) y (1,2,3) pertenecen a dicho plano. *(Soluc: SÍ; NO)*

c) Hallar otros dos puntos cualesquiera de este plano.

d) Comprobar que el vector formado por los 3 coeficientes de la ecuación general es ⊥ al plano.

15. Hallar una ecuaciones paramétricas para el plano x−2y+3z−1=0 *(Soluc: x=1+2λ−3μ, y=λ, z=μ)*

16. Hallar la ecuación de los planos cartesianos OXY, OYZ y OXZ en paramétricas e implícita.

17. *(**S**)* Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta x=2t, y=3+t, z=1−t, y por el punto A(2,−1,2). *(Soluc: 3x+4y+10z−22=0)*

18. **a)** Hallar la ecuación paramétrica y continua de la recta **s** que pasa por A(2,3, −1) y es paralela a la recta

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a ambas rectas. Hacer un dibujo de la situación. *(Soluc: 4x−3y−z=0)*

19. *(**S**)* Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas r: $\left.\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=3 \\ z=1+2\lambda \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l} x=-2-3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\ \ -\lambda \end{array}\right\}$

y que contiene al punto P(2,3,4). *(Soluc: −2x−5y+z+15=0)*

20. *(**S**)* Dadas las rectas

$$r:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1} \qquad s:\frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{3}$$

determinar la ecuación del plano que contiene a **r** y es paralelo a **s**. *(Soluc: 4x−7y−2z+13=0)*

21. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta $\left.\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x+y−5z=0)*

Vector normal $\vec{n}_\pi$

22. Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n}_\pi=(2,-3,1)$ y que pasa por el punto P(1,1,−3) *(Soluc: 2x−3y+z+4=0)*

23. Hallar la ecuación del plano paralelo a x+2y+3z+4=0 y que pasa por el punto (3,0,−1) *(Soluc: x+2y+3z=0)*

24. Comprobar que los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ del ejercicio 15 son ⊥ al vector normal $\vec{n}_\pi$ del plano.

25. *(**S**)* Dada la recta

$$r:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$$

y los puntos A(3,1,2) y B(1,5,6), hallar la ecuación del plano que contiene los puntos A y B y es perpendicular a la recta r. *(Soluc: 2x+3y−2z−5=0)*

26. ***(S)*** Hallar el plano que pasa por los puntos A(0,2,0) y B(1,0,1) y es perpendicular al plano x−2y−z=7.

(Soluc: 2x+y−2=0)

27. ***(S)*** Dados el plano π: 2x−3y+z=0 y la recta r: $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array}\right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. *(Soluc: 5x+3y−z−12=0)*

28. Hallar el valor de **a** para que los puntos A(1,2,−1), B(2,1,a), C(0,4,0) y D(2,0,−2) sean coplanarios. *(Sol: ∀a∈IR)*

29. ***(S)*** ¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros **a**, **b** y **c** para que los puntos A(1,0,1), B(1,1,0), C(0,1,1) y D(a,b,c) sean coplanarios? *(Soluc: a+b+c=2)*

Recta en implícitas:

30. **a)** Pasar la siguiente recta, expresada en implícitas, a paramétricas, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z-3=0 \\ x+y+3z-4=0 \end{array}\right\}$$

b) Ídem con $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$ **c)** Pasar $\left.\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\ -2\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right\}$ a implícitas.

31. Dada $\left.\begin{array}{l} 3x+2y-z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{array}\right\}$ se pide: **a)** Hallar un posible vector director.

b) Hallar un punto cualquiera de r

c) Con la información anterior, indicar unas ecuaciones paramétricas para dicha recta.

32. ***(S)*** Dadas las rectas r: $\left.\begin{array}{l} x-y+2z+1=0 \\ 3x+y-z-1=0 \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l} 2x+y-3z-4=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a **r** y es paralelo a **s**. *(Soluc: 27x+17y−23z−17=0)*

33. ***(S)*** Se consideran el plano π: 2x−y+z+1=0, la recta s: x−3y=0, z=1 y el punto A(4,0,−1). Hallar el plano que pasa por A, es paralelo a la recta s y perpendicular al plano π. *(Soluc: x−3y−5z−9=0)*

34. ***(S)*** Determinar la ecuación de la recta **r** que pasa por el punto A(1,0,2) y es perpendicular al plano determinado por el origen de coordenadas y la recta $\left.\begin{array}{l} x=2z-1 \\ y=z-2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1−2λ, y=λ, z=2+3λ)*

35. Hallar unas ecuaciones implícitas de la recta que pasa por P(2,−1,3) y es ⊥ a la recta $\left.\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=\ 3-\lambda \\ z=\ 0 \end{array}\right\}$

Recta que se apoya en otras dos rectas y un punto:

36. ***(S)*** Determinar la recta que pasa por el punto A(1,−1,0) y corta a las rectas

$$r: x=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2} \qquad s: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=z-1$$

(Soluc: x=1+λ, y=−1+4λ, z=7λ, o bien 3x+y−z−2=0, x−2y+z−3=0)

37. *(**S**)* Dado el punto P(1,1,1) y las rectas $r: \left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{array}\right\}$ $s: \left.\begin{array}{l} x=\mu \\ y=3\mu \\ z=2-\mu \end{array}\right\}$

hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y corta a **r** y a **s**. *(Soluc: x=1, y=1+λ, z=1)*

38. Ídem con las rectas $r: \left\{\begin{array}{l} 3x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+z+4=0 \end{array}\right.$ y $\left.\begin{array}{l} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{array}\right\}$ y el punto P(1,0,−1) *(Soluc: x=1+3 λ, y=λ, z=−1+3 λ)*

Rectas y planos, en general:

39. Hallar unas ecuaciones implícitas para los ejes de coordenadas.

40. Hallar las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta ⊥ al plano 2x+3z−4=0 y que pasa por P(1,−1,2)

41. *(**S**)* Consideremos el plano π de ecuación 20x+12y+15z−60=0. Hallar:

a) Los puntos *A,B,C* de intersección de π con los ejes coordenados *OX, OY, OZ*.

(Sol: A(3,0,0), B((0,5,0), C(0,0,4))

b) La distancia entre la recta *OB* y el eje *OX*. *(Sol: cero, pues ambas rectas se cortan)*

42. *(**S**)* Consideremos las rectas de ecuaciones

$$r: \left.\begin{array}{r} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{array}\right\} \qquad s: x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$$

a) Hallar **n** para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de **n** obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas. *(Soluc: n=1; 11x+y−6z+8=0)*

43. Un plano corta a los ejes *X,Y,Z* en los puntos x=a, y=b, z=c respectivamente. Deducir que su forma general o implícita es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

la cual se conoce como *ecuación segmentaria.*

44. *(**S**)* Dados los planos de ecuaciones 3x−y+z=1 y x+y−2z=0, hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos. Explicar cómo se ha hecho. *(Soluc: cualquier vector proporcional al (1,7,4))*

45. *(**S**)* Se considera el plano de ecuación x+3y+z=7, y los puntos A(1,1,1) y B(2,1,−1). Se pide ver que A y B están al mismo lado del plano. *(Ayuda: calcular los planos paralelos al dado que pasan por A y B respectivamente, y comparar sus términos independientes)*

46. *(**S**)* Hallar los valores de **a** para que los planos $-x+y+az=0$ y $ax+2y+2z=0$ corten al plano $x-y+z=1$ en dos rectas perpendiculares. *(Soluc: a=6)*

47. *(**S**)* Calcular un punto P de la recta r: x=0, z=0 de forma que el plano que contiene a P y a la recta s: $x+y=1$, $2x-z=-1$ sea paralelo a la recta t: $y+z=1$, $-x+y+z=0$. *(Soluc: P(0,2,0))*

Áreas y volúmenes:

48. *(**S**)* Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $2x+y+3z-6=0$ con los ejes de coordenadas. *(Soluc: $3\sqrt{14}$ u^2)*

49. *(**S**)* Un triángulo tiene vértices (0,0,0), (1,1,1) y el tercer vértice situado en la recta x=2y, z=1. Calcular las coordenadas del tercer vértice, sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$. *(Soluc: Hay 2 soluc: (0,0,1) y (2,1,1))*

50. *(**S**)* Hallar un plano que pasando por A(0,2,0) y B(0,0,2) corte al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo ABC valga 4. *(Advertencia: Hay 2 soluciones)* *(Soluc: $x/\sqrt{6}+y/2+z/2=1$ y $x/-\sqrt{6}+y/2+z/2=1$)*

51. *(**S**)* Determinar un punto de la recta x/2=y=z/2 que forme con los puntos (0,0,0), (1,0,0) y (0,1,−1) un tetraedro de volumen 1. *(Soluc: Hay 2 soluc: (4,2,4) y (−4,−2,−4))*

52. *(**S**)* Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,2,3), siendo equilátero el triángulo formado por los puntos en que corta a los ejes cartesianos. Calcular el volumen determinado por dicho plano y los ejes coordenados. *(Soluc: x+y+z=6; 36 u^3)*

Problemas de proyecciones:

53. *(**S**)* Dado el plano de ecuación $x+2y+3z=1$ y el punto A(1,1,1), hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde A a ese plano (la proyección ortogonal de A sobre él). *(Soluc: A'(9/14,4/14,−1/14))*

54. *(**S**)* Calcular el área del triángulo de vértices A', B', C', proyección ortogonal del triángulo de vértices A(1,1,1), B(1,1,2), C(1,2,1), sobre el plano x+y+z=1. *(Soluc: A'(1/3,1/3,1/3), B'(0,0,1), C'(0,1,0); área=$\sqrt{3}/6$ u^2)*

55. *(**S**)* Hallar la proyección del punto P(2,−1,3) sobre la recta r: $\left.\begin{array}{l} x=3t \\ y=5t-7 \\ z=2t+2 \end{array}\right\}$ y calcular la distancia del punto P a la recta r.
(Soluc: P'(3,-2,4); distancia=$\sqrt{3}$ u.)

56. *(**S**)* Hallar el punto simétrico de (2,0,3) respecto de la recta $r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ *(Soluc: (1,5,1))*

57. *(**S**)* Dados los puntos A(3,7,−2) y B(−1,9,1), calcular la longitud del segmento A'B', proyección ortogonal del segmento AB sobre el plano $x+3y-z-4=0$. *(Soluc: A'(1,1,0), B'(−32/11,36/11,32/11); longitud=$\sqrt{318}/11$ u)*

58. *(**S**)* Hallar las ecuaciones de la recta r', proyección ortogonal de r: $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=3 \end{array}\right\}$ sobre el plano $x-y+2z+4=0$
(Soluc: $3x-y-2z+1=0$, $x-y+2z+4=0$)