32 EJERCICIOS de ÁNGULOS y DISTANCIAS 2º BACH.

Problemas de ángulos:

1. Hallar el ángulo que forman las rectas r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=z-3$ y s: $x=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+5}{-1}$ *(Soluc: 60º)*

2. Determinar **m** para que las rectas r: $x-1=\frac{y+1}{2}=z$ y s: $\frac{x+2}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z+7}{m}$ sean perpendiculares.

(Soluc: m=-1)

3. Hallar el ángulo que forman los planos x+2y-z=3 y 2x-y+3z=0 *(Soluc: 71º)*

4. Dados los planos 3x-2y+5z-2=0 y kx+7y+z=0, hallar el valor de **k** para que sean perpendiculares.

(Soluc: k=3)

5. Hallar el ángulo formado por el plano π: x+2y-z-3=0 y la recta r: $\frac{x-1}{2}=y-2=z+1$ *(Soluc: 30º)*

6. *(S)* Hallar el ángulo formado por el plano π: 2x+3z=0 y la recta r: $\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=0 \\ 2x+9y+8=0 \end{array}\right\}$ *(Soluc: 8º)*

7. *(S)* Hallar el ángulo formado por la recta r: $\left.\begin{array}{r} 3x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$ y el plano π: 2x+3y-2z+5=0 *(Soluc: 0º)*

d(P,π):

8. Hallar la distancia del punto A(1,2,5) al plano π: 2x+2y-z-5=0 *(Soluc: 4/3)*

9. Hallar la distancia del plano π: 2x+y-z-3=0 al plano π': 4x+2y-2z-7=0 *(Soluc: √6/12)*

10. *(S)* Demostrar que el punto A(-1,1,0) no es coplanario con los puntos B(0,0,0), C(0,1,0) y D(1,2,1) y hallar la mínima distancia del punto A al plano determinado por B, C y D. *(Soluc: √2/2)*

11. *(S)* Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$ y s: $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$

a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a r y es paralelo a s. *(Soluc: 9x-y+15z-8=0)*

b) Determinar la distancia de s al plano π. *(Soluc: 25/√307)*

12. *(S)* Calcular el valor de **c** para que la recta r: $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{array}\right\}$ sea paralela al plano π: 2x-y+cz-2=0

Para el valor de **c** obtenido, calcular la distancia entre r y π. *(Soluc: c=-2; 7/3)*

13. *(S)* Dado el plano π: 2x-2y+z-3=0, hallar un punto P de la recta r: $\left.\begin{array}{l} x=3+t \\ y=-2-3t \\ z=-1+t \end{array}\right\}$ de manera que la distancia de P al plano π sea 1.

(Soluc: hay dos soluciones: P(8/3,-1,-4/3) y P'(2,1,-2))

14. *(**S**)* Calcular las coordenadas de un punto de la recta r: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ que equidiste de los planos π: 3x+4z-1=0 y π': 4x-3z-1=0 *(Soluc: hay dos soluciones: (0,-4,0) y (1/4,-29/8,1/4))*

15. *(**S**)* Hallar la ecuación del plano paralelo al de ecuación 2x-2y+z-8=0 y que diste seis unidades del mismo. *(Soluc: hay dos soluciones: 2x-2y+z+10=0 y 2x-2y+z-26=0)*

16. *(**S**)* Encontrar la ecuación del plano paralelo al de ecuación x+y+z=1, determinado por la condición de que el punto A(3,2,1) equidiste de ambos. *(Soluc: x+y+z=11)*

d(P,r):

17. Hallar la distancia punto-recta en los siguientes casos:

a) *(**S**)* P(3,4,5)

r: $x+1=\frac{y+2}{2}=\frac{z+5}{-1}$

(Soluc: $\sqrt{146}$)

b) *(**S**)* P(1,3,-1)

r: $\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$

(Soluc: $\sqrt{31/3}$)

18. *(**S**)* Calcular la distancia del punto P(1,-3,1) a la recta $\left.\begin{array}{l} x+y-2z+3=0 \\ 3x+2y+z-1=0 \end{array}\right\}$ *(Soluc: √6/3)*

19. *(**S**)* Se consideran la recta r: $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4z \end{array}\right\}$ y el punto P(3,4,1). Hallar el plano π que contiene a la recta r y al punto P. Calcular la distancia de P a r. *(Soluc: y-4z=0; 3)*

20. *(**S**)* Se considera la recta r: $\left.\begin{array}{l} x-2=0 \\ y+3=0 \end{array}\right\}$ y el punto P(0,1,3). Se pide:

a) Hallar la distancia de P a r. *(Soluc: 2√5)*

b) Determinar el plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r. *(Soluc: 2x+y-1=0)*

21. *(**S**)* Dados en el espacio los puntos A(1,1,2), B(2,1,1), C(1,2,1), D(0,1,1), calcular:

a) El área del triángulo ABC *(Soluc: √3/2 u^2)*

b) La distancia del punto A a la recta CD *(Soluc: √6/2 u)*

22. *(**S**)* Dado el triángulo de vértices A(1,1,1), B(0,3,5) y C(4,0,2), hallar su área y las longitudes de sus tres alturas. *(Soluc: área=$\sqrt{230}/2$ u^2; h_A=$\sqrt{115}/17$ u, h_B=$\sqrt{230}/11$ u, h_C=$\sqrt{230}/21$ u)*

Distancia entre rectas que se cruzan. Perpendicular común:

23. Hallar la distancia entre las rectas r: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-2}$ y s: $\frac{x-3}{-2}=y-2=\frac{z-1}{2}$ *(Soluc: 3)*

24. *(**S**)* Escribir las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas r: x=y=z y s: x=y=3z-1

(Soluc: $\left.\begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ x+y-6z+2=0 \end{array}\right\}$)

25. *(**S**)* Se consideran las rectas r: $\left.\begin{array}{l} x-2=0 \\ y+3=0 \end{array}\right\}$ y s: $\left.\begin{array}{l} x-2z=1 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$ Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s *(Soluc: se cruzan)*

b) Hallar la mínima distancia entre ambas *(Soluc: $11\sqrt{5}/5$)*

26. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{4}=z-2y$ s: $\left.\begin{array}{l} x=-1-t \\ y=3+t \\ z=1+t \end{array}\right\}$ hallar las ecuaciones de la recta que las corta perpendicularmente $\left(\text{Soluc: } \left.\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 3x-y-2z-4=0 \end{array}\right\}\right)$

27. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$ y s: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio. *(Soluc: se cruzan)*

b) Hallar la distancia entre ellas. *(Soluc: $51/\sqrt{237}$)*

28. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-4}{2}=y-4=z$ y s: $\left.\begin{array}{l} x=-2+3t \\ y=3 \\ z=1+t \end{array}\right\}$

a) Comprobar que las dos rectas se cruzan

b) Determinar un punto A de la recta r y un punto B de la recta s de manera que el vector que une A y B sea perpendicular a las rectas r y s. *(Soluc: A(42/11,43/11,-1/11) y B(32/11,3,29/11))*

Distancia entre dos puntos:

29. *(**S**)* Encontrar los puntos situados a distancia cinco del origen y pertenecientes a la recta que pasa por A(1,2,5) y B(6,5,6). *(Soluc: (32/7,29/7,40/7) y (0,7/5,24/5))*

30. *(**S**)* La distancia del punto P(1,2,3) a otro A del eje de abscisas es 7. Hallar las coordenadas del punto A *(Soluc: hay dos soluciones: A(7,0,0) y A'(-5,0,0))*

31. *(**S**)* Hallar el punto del plano x+y+z=1 que equidista de los puntos A(1,-1,2), B(3,1,2), C(1,1,0) *(Soluc: (4,-2,-1))*

32. *(**S**)* Encontrar en la recta que pasa por los puntos A(-1,0,1) y B(1,2,3) un punto tal que su distancia al punto C(2,-1,1) sea de tres unidades. *(Soluc: hay dos soluciones: (0,1,2) y (-2/3,1/3,4/3))*