PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

Probabilidad es el estudio de experimentos aleatorios o libres de determinación. Si un dado es lanzado al aire, entonces hay certeza de que caerá, pero no es cierto afirmar que aparecerá un 6. Si embargo, supongamos que repetimos el experimento de lanzar el dado; sea s el número de aciertos, esto es, el número de veces en que un 6 aparece, y sea n el número de jugadas. Se sabe entonces que empíricamente la relación ***f = s/n***, llamada **frecuencia relativa**, tiende a estabilizarse a la larga, o sea que se aproxima a un límite. Esta estabilidad es la base de la teoría de la probabilidad.

En teoría de probabilidad, definimos un modelo matemático de los fenómenos anteriores asignando "probabilidades" (o: valores límites de las frecuencias relativas) a los "sucesos" asociados con un experimento. Naturalmente, la seguridad en nuestro modelo matemático para un experimento dado depende del acercamiento de las probabilidades asignadas con la frecuencia relativa real. Esto da origen entonces a los problemas de verificación y confiabilidad que constituye el tema principal de la estadística.

Históricamente, la teoría de la probabilidad comenzó con el estudio de los juegos de azar, tales como la ruleta y las cartas. La probabilidad p de un suceso A se definió como sigue: Si A puede ocurrir de s maneras entre un total de n igualmente posibles, entonces

$$p = P(A) = s/n$$

Por ejemplo, al tirar un dado puede salir un número par de tres maneras, de las seis "igualmente posibles"; o sea, p=3/6=1/2. Esta definición clásica de probabilidad está viciada, esencialmente, puesto que la idea de "igualmente posible" es la misma que la de "con igual probabilidad" que no ha sido definida. El tratamiento moderno de la teoría de la probabilidad es puramente axiomático. Esto significa que las probabilidades de nuestros sucesos pueden ser perfectamente arbitrarias, excepto que ellas deben satisfacer ciertos axiomas que se enuncian posteriormente. La teoría clásica corresponderá al caso especial de los así llamados **espacios equiprobables.**

1.- FENÓMENOS DETERMINÍSTICOS Y ALEATORIOS.

1.1. Se dice que un experimento es aleatorio, si no se puede predecir, en el sentido ordinario, el resultado antes de llevar a cabo el experimento. También es necesario que se pueda repetir el experimento (por lo menos en teoría, aunque la repetición

no sea practicable) un número de veces muy grande y esencialmente bajo las mismas condiciones.
Por ejemplo, antes de tirar un dado nadie puede decir exactamente qué número se observará en la cara superior cuando se pare el dado. Puede ser cualquier número del 1 al 6. Además, es fácil imaginarnos tirando el dado varios miles de veces, hasta que se desgasten las esquinas y las condiciones generales del experimento cambien.

1.2. Se dice que un experimento es determinista si se puede predecir el resultado antes de llevar a cabo el experimento.
Por ejemplo, al lanzar una piedra al suelo desde una altura h sabemos la velocidad con que llegará al suelo.

2.- LEY DEL AZAR O DE LA REGULARIDAD DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS.

Tenemos que evitar la cuestión filosóficamente misteriosa de por qué el azar, que parece ser la antítesis de todo orden y regularidad, puede ser descrito en términos de leyes. Consideremos la **ley de los grandes números** que desempeña un papel central en toda la teoría de probabilidad.

La ley de los grandes números ha sido establecida con gran rigor y para circunstancias muy generales. Su esencia puede ser mostrada con un caso simple. Supongamos que alguien realiza un gran número de tiradas con una moneda simétrica y que apunta el número de veces que aparece cara y cruz. Un aspecto, el más familiar de la ley de los grandes números establece que al realizar un número suficientemente grande de jugadas existe la tendencia cada vez más fuerte a que los resultados se adapten a la predicción probabilística, es decir que el cociente (número de caras)/(número de jugadas) se aproxima a ½.

Esta ley no se entiende siempre adecuadamente por aquellos que hablan de la "ley de los promedios", y que dicen que la de las probabilidades "funciona a la larga". Hay dos puntos que se entienden mal, son los siguientes:

1) La ley que nos afirma que la razón de los aciertos tiende a igualar la probabilidad de acierto más y más a medida que el número de pruebas crece, también nos afirma que, a medida que hacemos crecer el número de pruebas, el **número absoluto de aciertos** tiende a desviarse más y más del número esperado.

Ejemplo:

En 100 tiradas 40 caras -----> 40/100 = frec. relativa.
En 1000 tiradas 450 caras -----> 450/1000 = frec. relativa.
40/100 < 450/1000 < ½
Sin embargo el número absoluto de caras (40) difiere de 50 por solamente 10, mientras que (450) difiere de 500 por 50.

2) Tiene que ver con la independencia de cualquier tirada en relación con los resultados obtenidos en tiradas previas. Si resulta que se ha obtenido cara varias veces seguidas, muchas personas se sienten inclinadas a pensar que la "ley de los promedios" hace que una tirada de cruz resulta ahora más probable. Suponiendo que se tire una moneda buena, simétrica, esto es simplemente falso.

3.- CONCEPTO DE MODELO MATEMÁTICO.

A la ciencia en general, le interesa construir modelos de los fenómenos naturales. Todos nosotros construimos modelos siempre que nos formamos una imagen en nuestro pensamiento de algo que estamos intentando hacer comprender; cuando dibujamos planos de un proyecto; cuando utilizamos una situación conocida para describir otra similar (por analogía) o cuando desarrollamos y comunicamos nuestras ideas escribiendo, pintando, esculpiendo, o usamos un simbolismo cualquiera.

Un científico, cuando se enfrenta a un sistema o fenómeno natural que no puede explicar en términos de teorías reales, construirá algún tipo de modelo del sistema. Empezará con una colección de ideas vagas, las cambiará examinando las distintas configuraciones y las distintas relaciones funcionales que sugieren, hasta que su "modelo mental" empieza a tomar una forma más definida. Puede entonces proceder a alguna forma concreta de modelado; esto es, puede intentar representar el sistema por un modelo físico o con dibujos o símbolos de algún tipo.

Se pueden distinguir tres tipos "puros" de modelos:

(i) **Un modelo icónico** es que realmente parece el objeto que representa. Por ejemplo, los modelos de coches (modelos reducidos) y los modelos químicos de moléculas (a escala).

(ii) **Un modelo análogo** es el que tiene unas ciertas propiedades que siguen leyes similares a las del sistema estudiado. Por ejemplo, las relaciones entre voltaje y corriente en una malla eléctrica son similares bajo ciertas condiciones a la relación entre carga y alargamiento en un muelle. Y así, cuando se estudia un sistema que comprende cargas en muelles, es posible usar una malla eléctrica como modelo análogo.

(iii) **Un modelo simbólico** es el que utiliza símbolos, como x, y, ø, etc. para representar cantidades físicas como distancias, ángulos, voltajes, etc. Las relaciones entre las cantidades se describen entonces (se modelan) por medio de relaciones algebraicas o ecuaciones que relacionan los símbolos.

En general un modelo de un sistema puede ser una combinación de dos, o incluso de los tres tipos puros de modelos.

Un **modelo matemático** se puede considerar simbólico y análogo.

El propósito de construir un modelo es estudiarlo y así llegar a una comprensión más profunda del sistema físico que representa. El procedimiento fundamental conocido por "modelo científico" es **formular un modelo de un sistema, manejarlo y observar los resultados** para el sistema físico, **idear experimentos para comprobar la veracidad de estos resultados.**

Un punto importante es que el proceso de descubrir conocimientos es un proceso evolutivo. Los modelos utilizados constantemente, se comprueban, se rechazan, se modifican, se simplifican o se hacen más complejos según la necesidad de ajustarse a los sistemas reales más o menos correctamente, y explicar resultados experimentales más avanzados, a medida que salen.

Una clasificación más útil de los modelos es describirlos como **determinísticos** (aquellos para los que se pueden especificar relaciones exactas entre cantidades implicadas) o **no determinísticos** -estocásticos- (cuando las cantidades siguen leyes estadísticas)

4.- CONCEPTO DE PROBABILIDAD COMO MODELO MATEMÁTICO DE LA LEY DEL AZAR.

4.1. La necesidad de las medidas probabilísticas.

Si se lleva a cabo un experimento, es para estudiar algún aspecto particular de un fenómeno físico fundamental. Cualquier situación que se de durante el experimento, puede llamarse un **SUCESO**. Se proponen preguntas sobre estos sucesos; y es de esperar que el experimento, o una serie de experimentos similares, puedan darnos sus respuestas.

Cuando se habla de sucesos relacionados con experimentos aleatorios, que todavía hay que llevar a cabo, es evidente que puede dudarse sobre la exactitud de cualquier afirmación hecha. Por ejemplo, la persona que tira el dado en el experimento "observar la cara superior de un dado cuando se tira sobre la mesa" podría afirmar que el resultado es un número mayor que 1; pero debe dudar de la exactitud de esta predicción. Porque si el dado está bien construido, el número 1 podría salir y probar que su predicción era falsa. La noción de probabilidad nace de la necesidad de medir de alguna manera la "duda" o la "certeza" de que un suceso dado ocurra o no. Si el que tira el dado afirma que hay una seguridad de 90 por 100 de que salga un número mayor que 1, está dando un número (90) que tomamos como una medida de la certeza de su predicción. De esta manera, un número unido a un suceso se llama **probabilidad.**

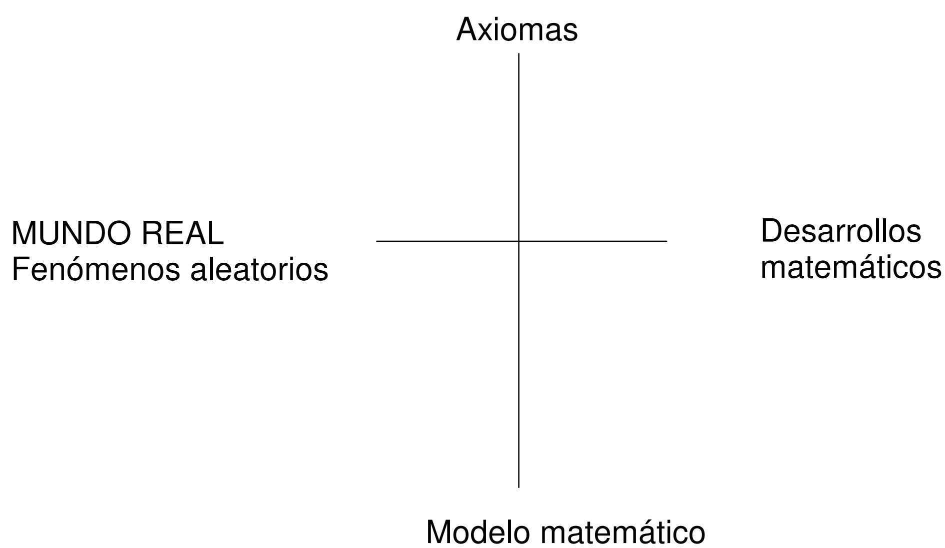
El propósito de la teoría de probabilidades es examinar las formas y medios para obtener esas medidas de certeza y hallar unos métodos satisfactorios de combinarlos cuando intervienen varios sucesos.

4.2. Construcción de modelos.

Al construir un modelo matemático de un fenómeno aleatorio, debemos incluir en él maneras de describir

(i) casos posibles;
(ii) sucesos y
(iii) probabilidades de sucesos.

También hay que dar reglas para combinar sucesos y probabilidades. Después de obtener un modelo abstracto de un proceso físico, podemos estudiarlo "en el papel" y conseguir conocimientos muy valiosos sobre el funcionamiento del proceso. Hay que tener siempre presente, no obstante, que los conceptos matemáticos usados son idealizaciones de algunos aspectos de la situación física, y así algunos desarrollos obtenidos del modelo pueden no representar exactamente desarrollos de las imágenes físicas. Hay que verificar mediante experimentos reales las conclusiones a las que se llegan por razonamientos a partir de un modelo abstracto.



La teoría de Probabilidades puede definirse como el modelo matemático construido para el estudio de las regularidades que se observan en la series de frecuencias correspondientes a fenómenos aleatorios.

5.- PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD RESPECTO DE DETERMINADOS SUCESOS Y DE CIERTAS OPERACIONES CON SUCESOS.

5.1. Espacio muestral.

El conjunto cuyos elementos son los posibles resultados diferentes (o mejor, que queremos considerar diferentes) de un experimento aleatorio, recibe el nombre de **espacio muestral.**

Hay que hacer notar, que un mismo experimento aleatorio puede dar lugar a diferentes espacios muestrales. En efecto: supongamos el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de un dado. Si estamos interesados en los resultados numéricos de dicho experimento aleatorio, el espacio muestral será el E = {1,2,3,4,5,6}, pero si en lo que estamos interesados es en la cualidad múltiplo de 2, nuestro espacio muestral será el E = {par, impar}.

Ejemplos de espacios muestrales hay muchos. Si consideramos el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de dos monedas al aire, el espacio muestral asociado será el E = {(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)} en el caso de que se distinguiesen las dos monedas. Si consideramos el experimento aleatorio consistente en introducir dos bolas en dos celdas A y B, el espacio muestral correspondiente será el E = {AA,AB,BA,BB} si las bolas son distinguibles; si las bolas fueran indistinguibles en cuanto a su orden de introducción, el espacio muestral sería el E = {AA,AB,BB}.

5.2. Tipos de espacios muestrales asociados a un experimento aleatorio.

Consideremos los siguientes tipos de espacios muestrales:

(a) Espacio muestral finito: este tipo de espacio muestral se da cuando E está formado por un número finito de elementos. Son ejemplos de este espacio muestral, el asociado al experimento del lanzamiento de un dado, o el correspondiente al lanzamiento de una moneda.

(b) Espacio muestral infinito numerable: Consideremos el experimento consistente en lanzar una moneda hasta obtener cara por primera vez. Vemos que a priori un experimento de tal tipo puede dar lugar a un conjunto infinito de eventualidades que podemos escribir en la siguiente forma

$$C,XC,XXC,XXXC,.....,\underbrace{X.......X}_{n\ veces}C,....$$

En tal situación, una formalización razonable deberá ser aquella en la que el espacio muestral E contenga como elementos todas aquellas sucesiones finitas de la forma XX.....XC. Sin embargo, también debería poseer este conjunto un posible resultado que fuese "la cara no aparece jamás", ya que por una parte, a priori no debería rechazarse tal resultado, aunque por el contrario la realización de infinitas tiradas sería materialmente imposible. Estamos aquí pues, en una situación común a todas

las que quieren representar formalmente un fenómeno real: toda formalización implica una elección y no es posible en la mayoría de los casos justificar una elección más que otra, solamente la eficacia y la coherencia de la teoría construida permite concluir en la validez de tal o cual esquema.
Definir el espacio muestral E, nos lleva a tener a priori un conjunto de posibles resultados que parecen "razonables" y conducen a resultados de acuerdo con la experiencia. Así en el ejemplo anterior debemos considerar como espacio muestral el construido por todas las sucesiones finitas o infinitas de la forma XX....XC, es decir, un conjunto de elementos que es infinito numerable.

(c) Espacio muestral continuo: Consideremos el experimento aleatorio consistente en el desplazamiento de una partícula en un plano y supongamos que estamos interesados en la posición que dicha partícula ocupa en el citado plano. En esta situación E es todo el plano y por tanto un conjunto continuo.

En este tema nos limitaremos al estudio de espacios muestrales finitos.

5.3. Sucesos.

Supongamos que se realiza un experimento aleatorio y que se formula una pregunta referente a dicho experimento. Un **"suceso"** asociado al mismo es el que nos va a responder a la cuestión de que dicha pregunta tenga o no respuesta, después de realizado el experimento

Sea por ejemplo E = {(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)} el espacio muestral asociado al experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda dos veces. Se pregunta :¿es el número de caras menor o igual que 1?. Esta pregunta tiene respuesta y el subconjunto de E que responde "si" a esta pregunta es el A = {(X,C),(C,X),(X,X)}.

Vemos pues, que **un suceso es un subconjunto del espacio muestral.**

5.4. Sucesos elementales.

Llamaremos **sucesos elementales** a los subconjuntos del espacio muestral formados por un solo elemento. Es decir, los sucesos elementales son los resultados posibles de nuestro experimento aleatorio indescomponibles en otros más sencillos.

Así, el suceso "sale cara" es un suceso elemental asociado al experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de una moneda, con espacio muestral E = {C,X}.

A los sucesos que son unión de sucesos elementales los llamaremos **sucesos compuestos.**

5.5. Operaciones con sucesos.

Supondremos que siempre que se realice un experimento aleatorio estamos en condiciones de asegurar si ha ocurrido o no un suceso determinado.

SUCESO CONTENIDO EN OTRO: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, diremos que el suceso A está contenido en el suceso B y lo representaremos por $A \subset B$, si siempre que ocurre el suceso A, ocurre el suceso B.

IGUALDAD DE SUCESOS: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, diremos que el suceso A es igual al suceso B, si siempre que ocurre el suceso A ocurre el suceso B y recíprocamente, es decir si se verifica que A C B y B C A. Lo representaremos por A=B.

UNIÓN DE SUCESOS: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, se define la unión de A y B como aquel suceso C que ocurre siempre que ocurra el suceso A o siempre que ocurra el suceso B. Lo representaremos por A U B = C.

INTERSECCIÓN DE SUCESOS: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, se define la intersección de A y B, como aquel suceso D que ocurre siempre que ocurren A y B simultáneamente. Lo representaremos por $A \cap B=D$.

SUCESO CONTRARIO O COMPLEMENTARIO DE OTRO DADO: Dado el suceso A de un cierto experimento aleatorio, se define el suceso contrario o complementario de A, como aquel suceso que ocurre siempre que no ocurre el suceso B. Lo representaremos por $\overline{A}$.

SUCESO SEGURO: Llamaremos suceso seguro al suceso que ocurre siempre. Lo representaremos por E ya que coincide con el espacio muestral, y resulta de la unión de todo suceso A con su contrario : $A \cup \overline{A} = E$.

SUCESO IMPOSIBLE, ø, es el suceso que no ocurre nunca, y resulta de la intersección de todo suceso con su contrario, $A \cap \overline{A} = ø$.

SUCESOS INCOMPATIBLES: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, diremos que son incompatibles si siempre que ocurre el suceso A, no puede ocurrir el suceso B, es decir, tales que el suceso intersección de éstos es el suceso imposible: $A \cap B = ø$.

DIFERENCIA DE SUCESOS: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, se define la diferencia de los sucesos A y B, que representaremos por A - B, como aquel suceso D que ocurre siempre que ocurra A y no ocurra B, A - B = D. Observemos que A - B = A $\cap\overline{B}$.

5.6. Propiedades de la unión e intersección de sucesos.

De forma inmediata se demuestra que la clase de los sucesos asociada a un experimento aleatorio, $\wp(E)$, verifica las siguientes propiedades:

(1) Propiedad conmutativa:
A $\cap$B = B $\cap$A; A U B = B U A .

(2) Propiedad asociativa:
A $\cap$ (B $\cap$C) = (A $\cap$B) $\cap$ C. $\forall A, B, C \in \wp(E)$
A U (B U C) = (A U B) U C.

(3) Propiedad distributiva:
A $\cap$ (B U C) = (A $\cap$ B) U (A C), $\forall A, B, C \in \wp(E)$
A U (B $\cap$ C) = (A U B) $\cap$ (A U C).

(4) Existe elemento neutro para la unión y existe elemento neutro para la intersección:
A $\cap$ E = A,
A U ø = A.

(5) Complementario:
Para cada suceso A de la clase, existe otro suceso $\overline{A}$ de la clase tal que:
A$\cap\overline{A}$= ø y A U $\overline{A}$ = E.

Con estas propiedades resulta que la clase de sucesos asociada a un experimento aleatorio, $(\wp(E), \cup, \cap)$, tiene estructura de Álgebra de Boole, que llamaremos **"Álgebra de Boole de sucesos"** .

Como consecuencia de las propiedades que caracterizan al Álgebra de Boole de sucesos, se verifican las siguientes propiedades:

Propiedad idempotente: A U A = A; A $\cap$ A = A.

Propiedad simplificativa: A U (A $\cap$ B) = A; A $\cap$ (A U B) = A.

Propiedad del elemento neutro: A U E = E; A $\cap$ ø = ø.

Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5.6. Axiomas de probabilidad.

Sea E un espacio muestral, (E) la clase de sucesos y P una función de valores reales definida en $\wp$(E) . Entonces P se llama **función de probabilidad**, y P(A) es llamada probabilidad del suceso A si se cumplen los siguientes axiomas:

Ax.1 : $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \wp(E)$.
Ax.2 : P(E) = 1.
Ax.3 : Si A y B son sucesos incompatibles, entonces
P(A U B) = P(A) + P(B).

5.7. Consecuencias de la definición.

(1) Si A1,A2,...,An es una serie de sucesos mutuamente excluyentes, entonces
P(A1 U A2 U...U An) = P(A1)+P(A2)+...+P(An)

(2) La probabilidad del suceso imposible es cero
P(ø) = 0

(3) Si $\overline{A}$ es el suceso contrario de A
P($\overline{A}$) = 1 - P(A)

(4) Si A $\subset$ B ==> P(B-A) = P(B) - P(A) y P(A)<P(B)

(5) Sean A, B sucesos cualesquiera, entonces
P(A-B) = P(A) - P(A $\cap$B)

(6)Sean A, B sucesos cualesquiera, entonces
P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A $\cap$B)

6.- REGLA DE LAPLACE.

6.1. Espacios finitos de probabilidad.

Sea E un espacio muestral finito; digamos E = {A1,A2,...,An}. **Un espacio finito de probabilidad** se obtiene al asignar a cada punto Ai $\in E$ un número real pi, llamado probabilidad de Ai, que satisface las siguientes condiciones:

1) pi $\geq$0 $\forall i$
2) $\sum_{i=1}^{n}$ pi = 1

La probabilidad P(A) de un suceso A, se define entonces como la suma de las probabilidades de los puntos de A.

EJEMPLO

Tres caballos A, B y C intervienen en una carrera; A tiene doble probabilidad de ganar que B; y B, el doble de ganar que C. ¿Cuáles son las respectivas probabilidades de ganar, esto es, P(A), P(B) y P(C)?

SOLUCIÓN:

P(A) = 2.P(B)

Como la suma de probabilidades debe ser 1:

P(A)+P(B)+P(C) = 4.P(C)+2.P(C)+P(C) = 1 ==> 7.P(C) = 1 ==>

P(C) = 1/7

P(A) = 4/7

P(B) = 2/7

¿Cuál es la probabilidad de que B o C ganen?

P(B U C) = P(B) + P(C) = 2/7 + 1/7 = 3/7.

6.2. Espacios finitos equiprobables.

Frecuentemente, las características físicas de un experimento sugieren que se asignen iguales probabilidades a los diferentes resultados, (o sucesos elementales), del espacio muestral. Un espacio finito E de probabilidad, donde cada punto muestral tiene la misma probabilidad, se llamará **espacio equiprobable.** En particular, si E contiene n puntos entonces la probabilidad de cada punto es 1/n. Además, si un suceso A contiene r puntos entonces su probabilidad es $r \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n}$. En otras palabras,

$$P(A) = \frac{\textit{número de elementos de A}}{\textit{número de elementos de E}} = \frac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$$

EJEMPLOS

(1) Selecciónese una carta al azar de una baraja corriente de 52 cartas. Llamemos A al suceso "salir espadas" y B al suceso "salir figuras". Calcular la probabilidad de los sucesos A, B y del suceso "salir espadas y figura".

SOLUCIÓN:

Como se trata de un espacio equiprobable,

P(A)=13/52=1/4
P(B)=12/52=3/13P(A $\cap$ B)=3/52

(2) Sean dos artículos escogidos al azar de un grupo de 12 de los cuales 4 son defectuosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos artículos sean defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos artículos no sean defectuosos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos un artículo sea defectuoso?

SOLUCIÓN:

a) nº de casos posibles = $C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

nº de casos favorables = $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

P(A) = 6/66 = 1/11

b) nº de casos favorables = $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

P(B) = 28/66 = 14/33

c) C = "por lo menos un artículo defectuoso" = " sólo un artículo defectuoso o los dos artículos defectuosos" = $\overline{B}$

P(C) = P($\overline{B}$) = 1 - P(B) = 1 - 14/33 = 19/33.

(3) Se desea hallar la probabilidad p de que n personas tengan fechas diferentes de cumpleaños.

SOLUCIÓN:

Para resolver este problema, no tenemos en cuenta los años bisiestos y suponemos que el cumpleaños de una persona puede caer en un día con igual probabilidad.
Puesto que hay n personas y 365 días diferentes, hay $VR_{365,n} = 365^n$ maneras de que n personas puedan cumplir años. Por otra parte, si las n personas cumplen en fechas distintas, entonces la primera persona puede nacer en cualquiera de los 365, la segunda puede nacer en cualquiera de los 364 días restantes, la tercera, en los 363 restantes, etc. Así hay $V_{365,n}$ =365.364.363...(365-n+1) maneras para que n personas tengan fechas diferentes de cumpleaños. Por consiguiente,

$$p = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-n+1)}{365^n}$$

7.- PROBABILIDAD CONDICIONADA.

7.1. Probabilidad condicionada.

Sea B un suceso cualquiera de un espacio muestral E con P(B)>0. La probabilidad de que un suceso A suceda una vez que B haya sucedido o, en otras palabras, la **probabilidad condicional** de A dado B, escrito P(A|B), se define como sigue:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

También, de modo análogo, se puede poner

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

De ambas igualdades se desprende:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Se generaliza este resultado para la intersección de un número finito de sucesos en el llamado **teorema de la multiplicación**:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots$$

$$\cdot P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

EJEMPLOS

(1) Los 800 alumnos de un Centro de enseñanza superior se distribuyen por sexos y tipo de carrera cursada, según muestra la tabla siguiente:

	Varón	**Mujer**	**Total**
Ciencias	300	200	500
Letras	140	160	300
Total	440	360	800

Llamemos V al suceso “ser varón” y L “ser un estudiante de letras”. Si se selecciona al azar un alumno se tiene:

$$P(V) = \frac{440}{800}, \quad P(L) = \frac{300}{800}, \quad P(L \cap V) = \frac{140}{800}$$

aplicando simplemente la regla de Laplace, pues la probabilidad de elegir un alumno es igual para todos.

Si se nos informase de que el alumno elegido es varón, la probabilidad de que fuera estudiante de Letras (suceso que denotamos por L/V), sería

$$P(L \mid V) = \frac{\textit{número de varones estudiantes de Letras}}{\textit{total de varones}} = \frac{140}{440}$$

que, evidentemente, es distinta de la probabilidad P(L) calculada anteriormente y que llamamos probabilidad condicionada de L por V, midiendo de qué modo se ve alterada la probabilidad de un suceso ante la realización de otro.

También se tiene que:

$$P(L \mid V) = \frac{140}{440} = \frac{\frac{140}{800}}{\frac{440}{800}} = \frac{P(L \cap V)}{P(V)}$$

(2) Lanzamos dos dados corrientes. Si la suma de puntos es 6, hallar la probabilidad de que en uno de los dados haya salido el 2. En otras palabras, si

B = {suma es 6} = {(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)}
y A = {aparece un 2 por lo menos en un dado}
hallar P(A|B).

Ahora B consta de 5 elementos y dos de ellos, (2,4) y (4,2), pertenecen a A: A ∩B = {(2,4),(4,2)}.
Entonces P(A|B) = 2/5.

(3) Un lote de 12 artículos tiene 4 defectuosos. Se toman al azar tres artículos del lote uno tras otro. Hallar la probabilidad de que los tres artículos no sean defectuosos.

SOLUCIÓN:

La probabilidad de que el primer artículo no sea defectuoso es 8/12 puesto que 8 entre los 12 no son defectuosos. Si el primero no es defectuoso, entonces la probabilidad de que el próximo artículo no sea defectuoso es 7/11 puesto que solamente 7 de los 11 sobrantes no son defectuosos. Si los dos primeros artículos no son defectuosos, entonces la probabilidad de que el último no sea defectuoso es 6/10 puesto que solamente 6 entre los 10 que quedan no son defectuosos. Así por el teorema de la multiplicación,

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

7.2. Procesos estocásticos finitos y diagramas en árbol.

Una sucesión (finita) de experimentos en los cuales cada experimento tiene un número finito de resultados con probabilidades dadas se llama **proceso estocástico (finito)**. Una manera conveniente de describir tal proceso y calcular la probabilidad de un suceso se obtiene por el **diagrama de árbol** como se ilustra en la figura del ejemplo siguiente; el teorema de la multiplicación del apartado anterior se usa para calcular la probabilidad de que el resultado representado por una trayectoria determinada del árbol suceda.

EJEMPLO

Tomemos las tres cajas siguientes:

CAJA I contiene 10 lámparas de las cuales 4 son defectuosas.

CAJA II contiene 6 con 1 defectuosa.

CAJA III contiene 8 con 3 defectuosas.

Escogemos al azar una caja y luego sacamos al azar una lámpara. ¿Cuál es la probabilidad p de que la lámpara sea defectuosa?

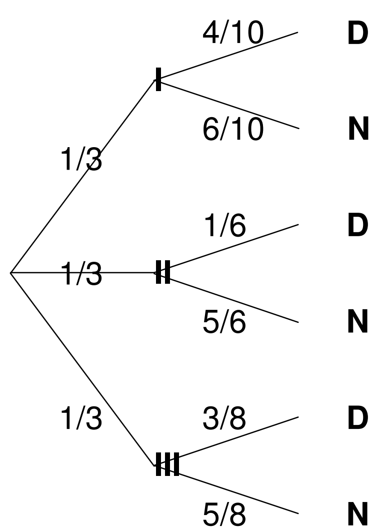
SOLUCIÓN:

Aquí realizamos una serie de dos experimentos:

(i) escoger una de las tres cajas;

(ii) escoger una lámpara que sea defectuosa (D) o no defectuosa (N).

El diagrama de árbol siguiente describe el proceso y da la probabilidad de cada rama del árbol:



La probabilidad de que una trayectoria determinada del árbol suceda es, según el teorema de la multiplicación, el producto de las probabilidades de cada rama de la trayectoria, o sea, que la **probabilidad de escoger la caja I y luego una lámpara defectuosa es (1/3).(2/5) = 2/15.**

Ahora como hay tres trayectorias mutuamente excluyentes que conducen a una lámpara defectuosa, la suma de las probabilidades de estas trayectorias es la probabilidad buscada.

$p = (1/3).(2/5)+(1/3).(1/6)+(1/3).(3/8) = 113/360$

8.- INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA.

8.1. Independencia.

Se dice que un suceso **B es independiente de un suceso A** si la probabilidad de que B suceda no está influenciada porque A haya o no sucedido. En otras palabras, si la probabilidad de B iguala la probabilidad condicional de B dado A : $P(B) = P(B|A)$. Ahora sustituyendo $P(B|A)$ por $P(B)$ en el teorema de la multiplicación obtenemos:

$$P(A)=P(A).P(B|A)=P(A).P(B)$$

EJEMPLOS

(1) Láncese una moneda corriente tres veces; obtenemos el espacio equiprobable

E = {(C,C,C),(C,C,X),(C,X,C),(X,C,C),(X,X,C),(X,C,X),(C,X,X),(X,X,X)}

Consideremos los sucesos

A = {primeros lanzamientos son caras}
B = {segundos lanzamientos son caras}
C = {exactamente se lanzan dos caras seguidas}

Claramente A y B son sucesos independientes; este hecho se verifica en seguida. Por otra parte, la relación entre A y C o B y C no es obvia. Insistimos en que A y C son independientes, pero que B y C son dependientes. Tenemos

P(A) = P({(CCC),(CCX),(CXC),(CXX)}) = 4/8 = 1/2
P(B) = P({(CCC),(CCX),(XCC),(XCX)}) = 4/8 = 1/2
P(C) = P({(CCX),(XCC)}) = 2/8 = 1/4

Entonces

P(A ∩ B) = P({(CCC),(CCX)}) = 1/4
P(A ∩ C) = P({(CCC)}) = 1/8
P(B ∩ C) = P({(CCX),(XCC)}) = 1/4

En consecuencia,

$P(A).P(B) = (1/2).(1/2) = 1/4 = P(A \cap B)$, y así A y B son independientes.
$P(A).P(C) = (1/2).(1/4) = 1/8 = P(A\ \ C)$, y así A y C son independientes.
$P(B).P(C) = (1/2).(1/4) = 1/8\ \ 1/4 = P(B \cap C)$, y así B y C son dependientes.

(2) La probabilidad de que A dé en el blanco es 1/4 y la de B es 2/5. Si A y B disparan, ¿cuál es la probabilidad de que se dé en el blanco?

SOLUCIÓN:

Sabemos que P(A)=1/4 y P(B)=2/5; buscamos P(AUB). Además, la probabilidad de que A o B den en el blanco no depende, de que el otro dé; esto es, el suceso de que A dé en el blanco es independiente del suceso de que B dé en el blanco:
$P(A \cap B) = P(A).P(B)$
Así
$P(AUB) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = (1/4)+(2/5)-(2/20) = 11/20$

8.2. Propiedades.

Si A y B son dos sucesos independientes, entonces, también lo son $\bar{A}$ y B, A y $\bar{B}$ y $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

Demostración:

(a) $P(\bar{A} \cap B)=P[B - A] = P(B)- P(A \cap B) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B)-P(A).P(B) = P(B).(1-P(A)) =$
$= P(B).P(\bar{A})$ c.q.d.

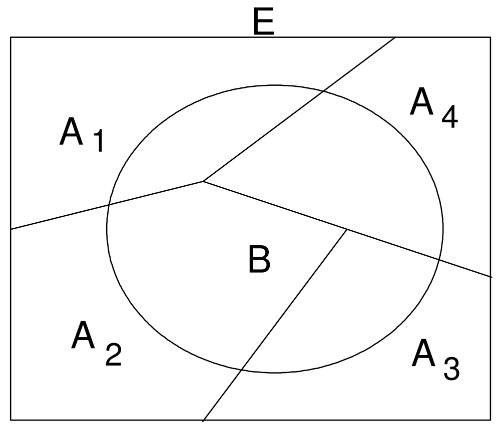
(b) $P(A \cap \bar{B}) = P[A - B] = P(A)-P(A \cap B) = P(A)-P(A).P(B) =$
$= P(A).(1-P(B)) = P(A).P(\bar{B})$ c.q.d.

(c) $P() = P(\overline{A \cup B}) = 1-P(AUB) = 1-[P(A)+P(B)-P(A \cap B)] =$
$= 1-[P(A)+P(B)-P(A).P(B)] = 1-P(A)-P(B)+P(A).P(B) =$
$= 1-P(A)-P(B).(1-P(A)) = (1-P(A)).(1-P(B)) =$
$= P(\bar{A}).P(B)$ c.q.d.

9.- TEOREMA DE BAYES.

9.1. Probabilidades totales.

Son frecuentes las situaciones en las que el suceso B depende de otros A_i , i= 1,2,..,n incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$ y tales que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$. Se trata de estudiar de qué forma los sucesos A_i intervienen en la probabilidad de B.



Se tiene que: $B = B \cap E = B \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] = (B \cap A_1) \cup .... \cup (B \cap A_n)$

y como a su vez, los $B \cap A_i$ son incompatibles entre sí, por el Axioma 3 puede escribirse que

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$ y, por último,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

que es la igualdad conocida como **probabilidad total** de un suceso cuando está condicionado por otros varios.

EJEMPLO

---

(1) Un ratón huye de un gato. Puede entrar por tres callejones, A, B y C en su escapada. En cada uno de ellos puede alcanzarlo o no. Se dan las siguientes probabilidades:
P(entre por A) = P(A) = 0’3; P(B) = 0’5; P(C) = 0’2.
P(lo cace habiendo entrado en A) = P(Z/A)=0’4; P(Z/B) = 0’6; P(Z/C) = 0’1
Calcula la probabilidad de que el gato cace al ratón.

SOLUCIÓN:
P(Z) = P(A) . P(Z/A) + P(B) . P(Z/B) + P(C) . P(Z/C) = 0’3 . 0’4 + 0’5 . 0’6 + 0’2 . 0’1 =0’44

9.2. Teorema de Bayes.

Sea A_i , i= 1,2,..,n un sistema completo (es decir,incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \varnothing, \ \forall i \neq j$ y tales que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$) y B otro suceso, entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(Ai)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+...+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

EJEMPLO

Si en el ejemplo anterior se supiera que el ratón ha sido cazado y nos interesáramos por saber si ha sido en el callejón B, debemos calcular la probabilidad del suceso (B/Z), que puede hallarse del siguiente modo:

$$P(B/Z) = \frac{P(B\cap Z)}{P(Z)} = \frac{P(B)\cdot P(Z/B)}{P(A)\cdot P(Z/A)+P(B)\cdot P(Z/B)+P(C)\cdot P(Z/C)} =$$

$$= \frac{0'5\cdot 0'6}{0'3\cdot 0'4+0'5\cdot 0'6+0'2\cdot 0'1} = \frac{0'3}{0'44} = \frac{15}{22}$$

EJERCICIOS

(1) Un experimento consiste en lanzar dos monedas.

a) Hallar el espacio muestral.

b) Hallar la probabilidad de los sucesos elementales.

c) Calcular la probabilidad de que las dos monedas caigan del mismo lado.

(2) Se lanzan dos dados.

a) Hallar el espacio muestral.

b) Describir los sucesos: A="sumar 6", B="sumar menos de 4", C="sumar más de 9"

c) Hallar la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

(3) De una baraja española de 48 cartas se extraen tres simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean oros?

(4) En una bolsa hay una bola blanca, tres rojas y seis negras.

a) Hallar la probabilidad de que al extraer una bola al azar ésta no sea negra.

b) Hallar la probabilidad de que la bola sea negra.

(5) a) En un curso hay 20 alumnos: 12 chicos y 8 chicas. Se constata que hay 7 alumnos con ojos azules: 2 chicos y 5 chicas, y que los restantes tienen los ojos de color pardo. Se elige un alumno al azar; se consideran los sucesos:

A = "El alumno elegido es varón"

B = "El alumno escogido tiene los ojos azules".

Expresar los siguientes sucesos en términos de uniones, intersecciones y complementarios de A y B:

C = "El alumno elegido es mujer".

D = "El alumno elegido tiene los ojos pardos".

E = "El alumno elegido es un chico de ojos azules".F = "El alumno elegido es un chico o tiene ojos azules".

G = "El alumno elegido es una chica de ojos pardos".

H = "El alumno elegido es una chica o tiene ojos pardos".

b) Hallar las probabilidades de los sucesos anteriores.

(6) De una baraja española de 48 cartas extraemos una de ellas. Hallar la probabilidad de que:

a) la carta extraída sea una copa;

b) salga una figura;

c) la carta sea una espada;

d) se extraiga una figura del palo de copas;

e) se extraiga una copa o una figura;

f) salga una figura pero no una espada.

(7) Supongamos que la probabilidad de que llueva es 0,5, la de que llueva o haga viento 0,75 y la de que no haga viento 0,625. Hallar la probabilidad de que:

a) sucedan los dos fenómenos meteorológicos;

b) no suceda ninguno;

c) deje de suceder al menos uno de los dos;

d) llueve únicamente.

(8) Se escogen al azar dos dígitos desde 1 hasta 9. Si la suma es par, hallar la probabilidad p de que ambos números sean impares.

(9) Se reparten 13 cartas de una baraja de 52 cartas a 4 personas que denominamos N,S, E y O.

a) Si S no tiene ases, hallar la probabilidad p de que su compañero N tenga exactamante dos ases.

b) Si N y S juntos tienen 9 corazones, hallar la probabilidad p de que E y O tengan cada uno dos corazones.

(10) Una clase tiene 12 chicos y 4 chicas. Se escogen tres estudiantes de la clase al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean todos chicos?

(11) Una urna contiene 7 bolas rojas y 3 blancas. Se sacan 3 bolas de la urna una tras otra. Hallar la probabilidad de que las dos primeras sean rojas y la tercera blanca.

(12) La caja A contiene nueva cartas numeradas de 1 a 9, y la caja B contiene cinco cartas numeradas de 1 a 5. Se escoge una caja al azar y se saca una carta. Si el número es par, hallar la probabilidad de que la carta proceda de la caja A.