

## SOLUCIONES GEOMETRÍA

1.- Calcula la distancia entre las rectas, estudiando antes su posición relativa:

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

$$\vec{d}_r(12, 0, 5); P(13, 2, 8)$$

$$\vec{d}_s(0, 1, 0); P'(6, 6, -9)$$

$$\vec{PP'}(-7, 4, -17)$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -169 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|\vec{PP'}, \vec{d}_r, \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{169}{|(-5, 0, 12)|} = \\ &= \frac{169}{\sqrt{169}} = \frac{169}{13} = 13 \end{aligned}$$

2.- Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano:  
 $6x - 5y + 3z - 1 = 0$

• Hallamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{3} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6} \rightarrow B\left(\frac{1}{6}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{5} \rightarrow C\left(0, -\frac{1}{5}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

• Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{540} u^3$$

• Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{540} u^3$$

3.- Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$$

y que pasa por el punto  $(-1, 1, 0)$ , y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.

Un vector normal al plano es  $\vec{n}(2, 3, 4)$ .

La ecuación del plano es:  $2(x+1) + 3(y-1) + 4(z-0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} u^3$$

4.- Determina la ecuación de la recta que pasa por  $P(1, 2, 2)$  y es perpendicular a las rectas  $r_1$  y  $r_2$ :

$$r_1: \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los vectores dirección de las rectas  $r_1$  y  $r_2$ :

$$r_1: (1, 2, -3) \times (1, 2, -1) = (4, -2, 0) \rightarrow \vec{d}_1(2, -1, 0)$$

$$r_2: (3, -1, 3) \times (1, 4, 0) = (-12, 3, 13) = \vec{d}_2$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a  $r_1$  y a  $r_2$ :

$$(2, -1, 0) \times (-12, 3, 13) = (-26, -52, -12) \rightarrow \vec{d}(13, 26, 6)$$

Como pasa por el punto  $P(1, 2, 2)$ , sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 1 + 13\lambda \\ y = 2 + 26\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-2}{6}$$

5.-

Halla la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a la recta  $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

y es ortogonal al plano  $\sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0$ .

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por  $\pi$  y  $\sigma$ .

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta  $r$ :

$$P(1, -1, 1) \in r \rightarrow P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} // r \rightarrow \vec{d}(3, -2, 1) // \pi$$

Si  $\pi$  es ortogonal a  $\sigma$ , el vector normal de  $\sigma$  es paralelo a  $\pi$ :

$$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \rightarrow (2, -1, 3) // \pi$$

Obtenemos un vector normal a  $\pi$ :  $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \rightarrow (5, 7, -1)$

La ecuación del plano  $\pi$  es:  $5(x-1) + 7(y+1) - 1(z-1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

• Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por  $\pi$  y  $\sigma$ :

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Vector dirección de la recta:  $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{array} \left. \right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ecuaciones de la recta: } \left\{ \begin{array}{l} x = 20\lambda \\ y = -\frac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - 19\lambda \end{array} \right.$$

6.-

Dados la recta  $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$  y el plano  $\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0$ ,  
halla el plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P(0, 1, -1); \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a  $\vec{d}$  y a  $\vec{n}$  y contendrá a  $P$ .

Un vector normal será:  $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \rightarrow (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es:  $6(x-0) - 9(y-1) - 7(z+1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

7.- Determina la perpendicular común a las rectas:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x + y = x + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad \text{Restando la 1ª ecuación a la 2ª: } y = 3 - x$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } s \text{ es: } S(2, -3, \mu)$$

Un vector genérico de origen en  $r$  y extremo en  $s$  es:  $\vec{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$

Este vector debe ser perpendicular a  $r$  y a  $s$ :

$$\left. \begin{aligned} \vec{RS} \cdot (2, -1, 1) &= 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \vec{RS} \cdot (0, 0, 1) &= 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \end{aligned} \right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5}, \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left. \begin{aligned} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{aligned} \right\} \vec{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

8.- Halla  $p$  para que las rectas  $r_1$  y  $r_2$  sean perpendiculares:

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \quad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene.

$$a) (4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \rightarrow p = 6$$

$$b) r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$$

• Punto de intersección:

$$\left. \begin{array}{l} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{array} \right\} \text{Sumando las dos últimas ecuaciones:}$$

$$1 = 9 + 8\mu \rightarrow -8 = 8\mu \rightarrow \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1ª ecuación:  $4 \cdot 0 = 1 - 1$ . Luego  $\lambda = 0$ ,  $\mu = -1$ .

Sustituyendo  $\lambda = 0$  en las ecuaciones de  $r_1$  (o bien  $\mu = -1$  en las de  $r_2$ ), obtenemos el punto de corte:  $(0, 1, 0)$ .

• Ecuación del plano que las contiene:

$$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \rightarrow (8, 5, -11) \text{ es un vector normal al plano.}$$

$$\text{Ecuación: } 8(x-0) + 5(y-1) - 11(z-0) = 0$$

$$8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

9.-

Dados la recta  $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$ ,

halla la ecuación de una recta situada en el plano  $\pi$ , que pase por el punto  $P(2, 1, -1)$  y sea perpendicular a  $r$ .

Un vector dirección de  $r$  es:  $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a  $(2, 1, 1)$  y perpendicular a  $(1, 2, 3)$  (pues está situada en el plano  $\pi$ ). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto  $P(2, 1, -1)$  pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

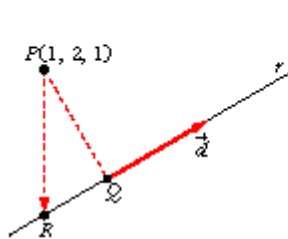
10.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(1, 2, 1)$  y corta perpendicularmente a la recta:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Escribamos  $r$  en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \rightarrow y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 \rightarrow x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$$



Si llamamos al punto  $P(1, 2, 1)$ , el vector  $\vec{PR}$  ha de ser perpendicular a  $r$ , es decir, perpendicular a  $\vec{d}(-1, -2, 1)$ .

Por tanto, como  $\vec{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$ :

$$\vec{PR} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$$

$$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

La recta que buscamos pasa por el punto  $P(1, 2, 1)$  y por el punto  $Q(2, 1, 0)$  ( $Q$  se obtiene sustituyendo  $\lambda = 0$  en las ecuaciones de  $r$ ).

Un vector dirección será:  $\vec{PQ}(1, -1, -1)$

$$\text{La recta es: } \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

11.- Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas:  $(-1 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, 2 + \lambda)$  y es perpendicular al plano  $2x + y - 3z + 4 = 0$ .

Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es:  $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \rightarrow (7, -11, 1)$

Un punto del plano es  $(-1, 1, 2)$  (pues contiene a la recta).

\* La ecuación del plano será:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(x - 2) = 0$$

$$7x - 11y + x + 16 = 0$$

\* Ángulo formado por la recta y el plano dados:

$$\vec{d}(3, 2, 1); \vec{n}(7, -11, 1)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0,357$$

$$90^\circ - \alpha = 69^\circ 4' 31'' \rightarrow \alpha = 20^\circ 55' 29''$$

12.- Determina, razonadamente, si las rectas

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan. Halla también el coseno del ángulo que forman sus direcciones.

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada una de las dos rectas:

$$\vec{d}_r: (1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -5, -3) \rightarrow \vec{d}_r(1, 5, 3); P(0, -1, 0)$$

$$\vec{d}_s: (2, 1, -1) \times (1, -1, -2) = (-3, 3, -3) \rightarrow \vec{d}_s(1, -1, 1); P(0, 1, 0)$$

$$\vec{PP}(0, 2, 0)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| |\vec{d}_s|} = \frac{|1 - 5 + 3|}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{105}} = 0,0976$$

13.- Sean los puntos  $P(3, 1, 5)$  y  $Q(-1, 7, 3)$ . Por el punto medio del segmento  $PQ$  trazamos un plano  $\pi$  perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos  $A, B$  y  $C$ .

a) Escribe la ecuación de  $\pi$ .

b) Calcula el área del triángulo  $ABC$ .

a) El plano es perpendicular al vector  $\vec{PQ}(-4, 6, -2)$ ; un vector normal al plano es  $(2, -3, 1)$ .

Pasa por el punto medio del segmento  $PQ$   $M(1, 4, 4)$ .

La ecuación del plano es:  $2(x-1) - 3(y-4) + 1(z-4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$$y = z = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow A(-3, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$x = y = 0 \rightarrow x + 6 = 0 \rightarrow x = -6 \rightarrow C(0, 0, -6)$$

$$\vec{AB}(3, 2, 0) \quad \vec{AC}(3, 0, -6)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-12, 18, -6) \rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{504}$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} = 11,22 \text{ u}^2$$

14.- Halla los puntos simétricos de  $P(1, 2, 3)$  respecto del plano

$$\alpha: x - 3y - 2z + 4 = 0 \text{ y respecto de la recta } r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$$

■ Simétrico respecto del plano:

• Ecuación de la recta que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $\alpha$ :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

• Punto de corte de  $\alpha$  con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en  $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$ . Este es el punto medio del segmento  $PP'$ , siendo  $P'$  el simétrico de  $P$  respecto del plano  $\alpha$ . Luego, si  $P'(x, y, z)$ , entonces:  $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow P'(2, -1, 1)$

■ Simétrico respecto de la recta:

• Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 & \rightarrow & y = x + 3 \\ 4x - z = 0 & \rightarrow & z = 4x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

• Hallamos la ecuación del plano perpendicular a  $r$  que pasa por  $P$ :

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 4(x - 3) = 0$$

$$x + y + 4x - 15 = 0$$

• Obtenemos el punto de intersección de la recta  $r$  con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es  $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$ . Este es el punto medio del segmento  $PP''$ , siendo  $P''$  el simétrico de  $P$  respecto de la recta  $r$ . Así, si  $P''(a, b, c)$ , entonces:  $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \rightarrow P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

15.- Halla la distancia entre el punto  $P(2, 1, 3)$  y la recta

$$r: \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$



• Escribimos la recta  $r$  en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 + x \\ x - y = 2 - x \end{array} \right\} \text{Restando: } \left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = x + z - 2 = -1 + 3\lambda \end{array} \right\} r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• Hallamos la ecuación del plano que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$ :

$$2(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

• Obtenemos el punto de corte de  $r$  con  $\pi$ :

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{11}{14}$$

El punto de corte es  $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$ .

• Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = \left| \left( \frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14} \right) \right| = \sqrt{\frac{1050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} = 2,31$$

16.- Determina la ecuación de un plano  $\pi$  paralelo al plano de la ecuación  $x - 2y + 3z + 6 = 0$  y que dista 12 unidades del origen.

Un plano paralelo a  $x - 2y + 3z + 6 = 0$  es de la forma  $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$ . Tenemos que hallar  $k$  para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$\text{dist}[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos:  $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$  y  $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

17.- Halla la ecuación de la proyección ortogonal  $r'$  de la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \text{ sobre el plano } \alpha: x - 3y + 2z + 12 = 0.$$

La proyección ortogonal de  $r$  sobre  $\alpha$  es la recta intersección del plano  $\alpha$  con otro plano  $\pi$ , perpendicular a  $\alpha$  y que contiene a  $r$ .

$$P(1, 1, 2); \vec{d}_r(2, 1, 2); \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de  $\pi$  es:  $8(x - 1) - 2(y - 1) - 7(z - 2) = 0$

$$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de  $r$  sobre  $\alpha$  es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

18.-

Los puntos  $P(0, 1, 0)$  y  $Q(-1, 1, 1)$  son dos vértices de un triángulo, y el tercero,  $S$ , pertenece a la recta  $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ . La recta que contiene a  $P$  y a  $S$  es perpendicular a la recta  $r$ .

a) Determina las coordenadas de  $S$ .

b) Calcula el área del triángulo  $PQS$ .

$$\text{a) } \vec{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \vec{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$$

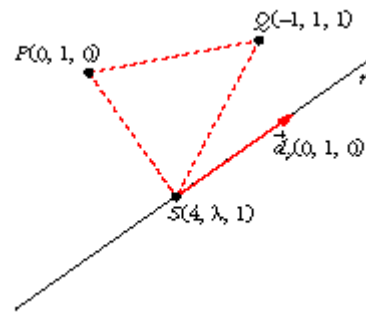
$$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$S(4, 1, 1)$$

$$\text{b) } \vec{PS}(4, 0, 1) \quad \vec{PQ}(-1, 0, 1)$$

$$\vec{PS} \times \vec{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{PS} \times \vec{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u}^2$$



19.-

$$\text{Sea la recta } r: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

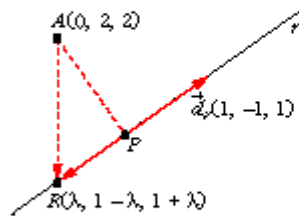
a) Determina la ecuación de la recta  $s$  que corta perpendicularmente a  $r$  y pasa por  $(0, 2, 2)$ , y las coordenadas del punto  $P$  intersección de  $r$  y  $s$ .

b) Halla la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a  $r$  y  $s$  y la de la recta  $t$  perpendicular a  $\pi$  por el punto  $P$ .

c) Si  $Q$  es cualquier punto de  $t$ , explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de  $Q$  a  $r$ , a  $s$  y a  $\pi$ .

a) Escribimos  $r$  en forma paramétrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z - 1 = 0 \rightarrow x = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - x \end{array} \right\} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



Un punto genérico de  $r$  es  $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$ .

$\vec{AR}$  ha de ser perpendicular a  $r$ , es decir:  $\vec{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$

$$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

$$R(0, 1, 1)$$

La recta  $s$  pasa por  $A(0, 2, 2)$  y por  $R(0, 1, 1)$ .

$$\vec{RA}(0, 1, 1) \rightarrow s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de  $r$  y  $s$  es  $P(0, 1, 1)$ .

b) Ecuación del plano  $\pi$  que contiene a  $r$  y a  $s$ :

$$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1); P(0, 1, 1) \in \pi$$

$$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$\pi: -2x - y + z = 0$$

Ecuación de la recta  $t$  perpendicular a  $\pi$  por el punto  $P$ :

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si  $Q \in t \rightarrow \text{dist}(Q, r) = \text{dist}(Q, s) = \text{dist}(Q, \pi) = \text{dist}(Q, P)$

Las tres distancias coinciden con la distancia de  $Q$  al punto  $P$ , luego las tres son iguales entre sí.

20.- Halla el plano de la familia:  $mx + y + z - (m + 1) = 0$  que está situado a distancia 1 del origen.

Hallamos la distancia del origen,  $(0, 0, 0)$ , al plano y la igualamos a 1:

$$\text{dist} = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m + 1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 2}} = 1$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2 + 2} \rightarrow (m + 1)^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

El plano es:  $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$ ; es decir:  $x + 2y + 2z - 3 = 0$