A. MATRICES

1. EJEMPLOS DE MATRICES. ÓRDENES

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m filas
n columnas

$$\text{Ejemplos}\begin{cases} B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Orden} = 2 \times 2 \\ C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{Orden} = 3 \times 2 \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$
Orden = 3 x 3

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Orden = 1 x 3

2. TIPOS DE MATRICES

Matriz fila: tienen una única fila $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Matriz columna: tienen una sola columna $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Matriz cuadrada: tienen el mismo número de filas y columnas

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -8 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \xRightarrow{\text{DIAGONAL PRINCIPAL}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -7 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Rectangular: tienen distinto número de filas y columnas. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Traspuesta: es aquella que se obtiene cambiando filas por columnas. A^t

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -12 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -12 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Matriz Traspuesta:

1) $(A^t)^t = A$

2) $(A+B)^t = A^t + B^t$

3) $(\alpha A)^t = \alpha A^t \quad \alpha \in \mathbb{R}$

4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Matriz Simétrica: es la matriz cuadrada que coincide con su traspuesta ($A = A^t$)

Matriz Antisimétrica: es la matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su traspuesta ($A = -A^t$)

Matriz nula: todos los elementos son cero $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriz Diagonal: todos los elementos son cero excepto los de su diagonal principal. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

Matriz unidad: es diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales a 1.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Matriz triangular superior: es una matriz cuadrada con todos los elementos nulos por debajo de la diagonal principal. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

- Matriz triangular inferior : es una matriz cuadrada con todos los elementos nulos por encima de la diagonal principal. $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$

3. OPERACIONES CON MATRICES

SUMA

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}}$$

Deben ser matrices equidimensionales.

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ

$$\boxed{5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 10 & -15 & 25 \\ 5 & -10 & 20 \end{pmatrix}}$$

se multiplican todos los elementos de la matriz por ese número.

PRODUCTO DE MATRICES

$$\boxed{\underset{m\,x\,n}{A} \cdot \underset{n\,x\,p}{B} = \underset{m\,x\,p}{C}}$$

$$\underset{3x3}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 0+(-1)\cdot 5 & 1\cdot 2+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 \\ 0\cdot 1+2\cdot 0+(-5)\cdot 5 & 0\cdot 2+2\cdot(-2)+(-5)\cdot 3 \\ 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot(-2)+3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -25 & -19 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$$

➔ <u>IMPORTANTE:</u> El producto de matrices **NO** cumple la propiedad conmutativa

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

Propiedades de las operaciones:

De la SUMA de matrices: A+(B+C) = (A+B) + C // A+B = B+A // A+ 0 = A // A+(-A) = 0 // $(A+B)^t = A^t + B^t$

Del PRODUCTO DE NÚMERO POR MATRIZ: k(A+B) = Ka + k B // (k+h)A = KA + ha // k(hA) = (kh)A // 1·A = A

Propiedades simplificativas: A+C = B+C ⇔ A = B // KA = kB ⇔ A = B, si $k \neq 0$ // kA = HA ⇔ k = h, si $A \neq 0$

Del PRODUCTO de matrices: A(BC) = (AB)C // $AI_n = I_nA = A$ // A(B+C) = AB + AC // $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

Atención:

- **EL PRODUCTO DE MATRICES NO ES CONMUTATIVO**
- **NO SE CUMPLE NECESARIAMENTE AB = 0 ⇔ A = 0 o B = 0**
- **NO SE CUMPLE NECESARIAMENTE AB = AC ⇔ B = C**
- **NO SE CUMPLE NECESARIAMENTE $(A\pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ o $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$**

Por cumplirse estas propiedades se puede operar como con números A EXCEPCIÓN DE LO DICHO SOBRE QUE NO SE CUMPLE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA DEL PRODUCTO.

Ejemplo

Resuelve el sistema $\left.\begin{matrix} 3X-5Y=A \\ 4X-3Y=B \end{matrix}\right\}$ siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Lo resolvemos por doble reducción

- $\left.\begin{matrix} 3X-5Y=A \\ 4X-3Y=B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} {}_{x(-4)}3X-5Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ {}_{x3}4X-3Y=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow + \left.\begin{matrix} -12X+20Y=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -4 & -12 \end{pmatrix} \\ 12X-9Y=\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\}$

$$11Y=\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Y=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}}$$

- $\left.\begin{matrix} 3X-5Y=A \\ 4X-3Y=B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} {}_{x(-3)}3X-5Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ {}_{x5}4X-3Y=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow + \left.\begin{matrix} -9X+15Y=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \\ 20X-15Y=\begin{pmatrix} -5 & 20 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\}$

$$11X=\begin{pmatrix} -11 & 20 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 & 20 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar dos constantes α y β tal que $A^2=\alpha\cdot A+\beta\cdot I$

b) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)\cdot(A+X)=A^2-X^2$

Solución

a) $\alpha=2$ y $\beta=-1$

b) $A^5=5A-4I$

c) Si $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, siendo $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ Las matrices X deben cumplir que

A·X=X·A para que sea cierta la igualdad $(A-X)\cdot(A+X)=A^2-X^2$. Esas

matrices X son las siguientes $\left\{\begin{matrix} c=0 \\ a=d \end{matrix}\right. \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}}$

Ejemplo

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Calcular A^{86}.

Solución $\boxed{A^3=I \Rightarrow A^{86}=A^{3\cdot 28+2}=A^{3\cdot 28}\cdot A^2=(A^3)^{28}\cdot A^2 \underset{\boxed{A^3=I}}{=} I^{28}\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2}$

4. RANGO DE UNA MATRIZ

Rango de una matriz = mayor nº de filas L. I. = mayor nº de columnas L.I.

Método de Gauss:

a) Suprimir filas iguales o proporcionales. (*)
b) Permutar dos filas o dos columnas.
c) Multiplicar o dividir una fila por un nº real distinto de cero. (*)
d) Sumar a una fila otra multiplicada por un número.

(*) Con columnas solo si estoy hallando el rango, no si estoy resolviendo un sistema

Ejemplo

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 6 & -1 & 10 & 0\\ 0 & -13 & -8 & 5\end{pmatrix} \underset{\text{F2 - 6·F1}}{=} \text{rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -13 & -8 & 6\\ 0 & -13 & -8 & 5\end{pmatrix} \underset{\text{F3 - F2}}{=} \text{rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -13 & -8 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix} = 3$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 0\\ 3 & 4 & 3 & -6\\ 2 & 4 & 4 & -6\end{pmatrix} \overset{\boxed{3\cdot F1 \text{ y } 2\cdot F2}}{=} \text{rango}\begin{pmatrix}6 & 0 & -6 & 0\\ 6 & 8 & 6 & -12\\ 0 & 4 & 6 & -6\end{pmatrix} \overset{\boxed{F2 - F1}}{=} \text{rango}\begin{pmatrix}6 & 0 & -6 & 0\\ 0 & 8 & 12 & -12\\ 0 & 4 & 6 & -6\end{pmatrix} \overset{\boxed{2\cdot F3}}{=} \text{rango}\begin{pmatrix}6 & 0 & -6 & 0\\ 0 & 8 & 12 & -12\\ \cancel{0} & \cancel{8} & \cancel{12} & \cancel{-12}\end{pmatrix} = 2$$

B. DETERMINANTES

1. EJEMPLOS DE DETERMINANTES

$|3|=3$

$|-5|=-5$

$$\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3\cdot 1-(-5)\cdot 2=-3+10=7$$

$$\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-6+4=-2$$

$$\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 5 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot(-3)+5\cdot 2\cdot(-1)+4\cdot 1\cdot 0-(-1)(-2)\cdot 0-3\cdot 2\cdot 1-4\cdot 5\cdot(-3)=62$$

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. *El determinante de una matriz triangular es igual al producto de la diagonal principal*
2. $\boxed{\boxed{\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)}, \text{es decir } |A\cdot B| = |A|\cdot|B|}$
3. $\boxed{|A| = |A^t|}$
4. *Si A es una matriz de orden n y k es un número real, entonces:* $|k\cdot A| = k^n\cdot|A|$
5. *Un determinante con una fila o columna de ceros es igual a cero.*
6. *Si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas de un determinante, el valor del determinante queda multiplicado por (-1)*
7. *Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.*
8. *Si dos filas o columnas son proporcionales el determinante es igual a cero*
9. *Si una fila (columna) es combinación lineal de otras filas (columnas), entonces el valor de determinante es nulo*
10. *Si se multiplica una fila o una columna de un determinante por un número real, entonces el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.*
11. *Si a una fila (columna) se le suma otra fila (columna) multiplicada por un número real entonces el valor del determinante no varía.*
12. $$|A| = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ j & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

EJEMPLOS:

1

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2 = 30 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot4\cdot2 = -24$$

2

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 14 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 41 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 41 \end{vmatrix} = -14$$

3

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 14 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 41 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 41 \end{vmatrix} = -14$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ |A| = -7 \ \text{ entonces } |2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot (-7) = -56$$

Ojo es 2^3· IAI no 2· IAI

5

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

6

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -213 \underset{\boxed{\text{Intercambio la fila 1 y la 3}}}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 213$$

Ojo aquí cambia el signo

7

$$\begin{vmatrix} \Rightarrow 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ \Rightarrow 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & \underset{\Uparrow}{5} & \underset{\Uparrow}{5} \end{vmatrix} = 0$$

8

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & -9 & 4 \\ \underset{\Uparrow}{3} & \underset{\Uparrow}{-3} & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

9

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ ya que } \ F_3 = F_2 + 2 \cdot F_1$$

10

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-2&3\\10&5&15\\1&2&0\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&1&3\\1&2&0\end{vmatrix}\qquad |B|=\begin{vmatrix}-3&7\\6&2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-1&7\\2&2\end{vmatrix}$$

Ojo el valor del determinante cambia si multiplico una fila o columna por un número

11

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\2&0&5\end{vmatrix}=-15\ \underset{\substack{\text{Sumo a la tercera fila}\\ \text{la primera multiplicada}\\ \text{por dos }\boxed{F_3=F_3+2\cdot F_1}}}{\Rightarrow}\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\4&4&11\end{vmatrix}=-15$$

12

$$|B|=\begin{vmatrix}2+3&2&2\\5+2&0&7\\1+9&-3&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&2\\5&0&7\\1&-3&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&2&2\\2&0&7\\9&-3&6\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix}1+2&3+5\\4+6&-2+0\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}1&3\\4&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&5\\6&0\end{vmatrix}\\ -6-80\neq-2-12+(-30)}$$

¡Ojo! de una en una

3. DETERMINANTES DE ORDEN SUPERIOR A TRES

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-1\\1&2&3\\-4&2&7\end{pmatrix},$$

- El menor complementario del elemento a_{11} es $M_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\2&7\end{vmatrix}=8$ $\qquad A=\begin{pmatrix}3&\cancel{4}&\cancel{-1}\\\cancel{1}&2&3\\\cancel{-4}&2&7\end{pmatrix}$

- El menor complementario del elemento a_{23} es $M_{23}=\begin{vmatrix}3&4\\-4&2\end{vmatrix}=22$ $\qquad A=\begin{pmatrix}3&4&\cancel{-1}\\\cancel{1}&\cancel{2}&3\\-4&2&\cancel{7}\end{pmatrix}$

- El Adjunto del elemento a_{11} es $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=1\cdot 8=8$
- El Adjunto del elemento a_{23} es $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)\cdot 22=-22$

- el signo que le afecta a cada elemento de la matriz para hallar el adjunto es $\begin{pmatrix}+&-&+&-&\cdots\\-&+&-&+&\cdots\\+&-&+&-&\cdots\\-&+&-&+&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{Desarrollando por la 1º fila.}}}{=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad -2 \quad 4} \\ 2 \quad -2 \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ -3 \quad 4 \quad 0 \quad 5 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{Desarrollando por la 1º fila.}}}{=} 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\left(-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}\right) + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 4\cdot\left(-\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 1\cdot(-48) + 3\cdot(-36) + (-2)\cdot 24 + 4\cdot(-0) = -48 - 108 - 48 + 0 = \underline{-204}|$$

*Si desarrollamos el determinante por cualquier otra fila ó columna da el mismo resultado,por ejemplo vamos a desarrollarlo por la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \boxed{-2} & 4 \\ 2 & -2 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 2 & \boxed{3} & 4 \\ -3 & 4 & \boxed{0} & 5 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{Desarrollando por la 3ºcolumna}}}{=} (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot\left(-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}\right) + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot\left(-\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}}\right) =$$

$$= (-2)\cdot 24 + 1\cdot 18 + 3\cdot(-58) = -48 + 18 - 174 = \underline{-204}|$$

► **ES MEJOR UTILIZAR LAS PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES PARA HACER CEROS Y DESPUÉS DESARROLLAR POR LA FILA O LA COLUMNA EN LA QUE HAYA MÁS CEROS**

Elijo la primera columna que tiene ya un cero. Hacemos cero toda la columna excepto el elemento $a_{11} = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\substack{F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_4' = F_4 + 3F_1}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 13 & -6 & 17 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{Desarrollando por la 1ºcolumna}}}{=} 1\cdot\begin{vmatrix} -8 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 13 & -6 & 17 \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{Hacemos el determinante de orden 3}}}{=}$$

$$= -408 + 260 + 72 + 234 - 170 - 192 = -204$$

Ojo con las transformaciones permitidas en Gauss o en el rango y que cambian el determinante:

No cambia el determinante: Fi nueva = Fi $\pm$ kFj

Sí cambia el determinante intercambiar filas o columnas

4. MATRIZ INVERSA

- Sea A una matriz cuadrada de orden n, se define su matriz inversa $\boxed{A^{-1}}$ como la matriz de orden n que verifica: $\boxed{A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I}$ donde I es la matriz identidad de orden n.

- $\boxed{\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$

- **CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA** $\boxed{A^{-1}}$
  1. Calculamos el determinante de A , $|A|$
  2. Hallamos la matriz adjunta A^d
  3. La matriz inversa de A es : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{(A^d)^t}{|A|} = \dfrac{1}{|A|}(A^d)^t}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ Calculamos la matriz inversa de A $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot(A^d)^t}$

1º) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4-8-6+8 = -2$

2º) Matriz adjunta $A^d = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

3º) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot(A^d)^t = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

► **UTILIZAR LA MATRIZ INVERSA PARA RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES. ¡OJO! HAY QUE FIJARSE MUY BIEN EN EL LADO POR EL QUE MULTIPLICO POR LA INVERSA**

$AX = BA$

* Despejamos la matriz X $\Rightarrow$ $AX = BA \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}BA \underset{A^{-1}A=I}{\Leftrightarrow} I\cdot X = A^{-1}BA \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}BA}$

$AXB - 3A = I$

* Despejamos la matriz X $\Rightarrow$ $AXB-3A = I \Leftrightarrow AXB = I+3A \Leftrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(I+3A)B^{-1} \Leftrightarrow$

$$\underset{\substack{A^{-1}A=I \\ BB^{-1}=I}}{\Leftrightarrow} I\cdot X\cdot I = A^{-1}(I+3A)B^{-1} \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}(I+3A)B^{-1}}$$

C. RANGO DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

Rango de una matriz = mayor nº de filas L. I. = mayor nº de columnas L.I.

- Si una matriz de orden 3 tiene rango 3 → su determinante es ≠ 0.

- Una matriz de dimensión 3 x 4 tiene como mucho rango 3.

- Si una matriz tiene rango 3 →

. Existe un determinante de orden 3 es ≠ 0

. Todos los determinantes de orden 4 son = 0

- Las transformaciones del método de Gauss no varían el rango de una matriz, pero Gauss no es recomendable cuando hay parámetros

- **Menor de orden h** de una matriz A es el determinante de una matriz que se obtiene considerando únicamente h filas y h columnas de A.
- **Orlar un menor de orden h** es el proceso de ir añadiendo a un menor de orden h una fila y columna, con el fin de obtener un menor de orden h+1.
- Se llama **rango de una matriz A** (**rg A**) al orden del mayor menor no nulo.

- ***PASOS PARA CALCULAR EL RANGO***

  1. Quitar todas las filas ó columnas proporcionales o nulas.
  2. Elegimos un menor de orden h distinto de cero, se orla obteniendo un menor de orden h+1, si es distinto de cero se orla de nuevo y así sucesivamente hasta que al orlarse todos los menores me salga cero.

Ejemplo Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$1 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 10 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 2 = 0$$

Por tanto rg(A)=3

Ejemplo Estudia según el valor del parámetro t el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & t \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ el rango de A es, como mínimo 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & t \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} = 2t + t - t^2 = 3t - t^2 \Rightarrow 0 = 3t - t^2 = t(3-t) \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

$\underset{\text{(para todo)}}{\forall} \; t \neq 0,3 \Rightarrow rgA = 3$	$Si \;\; t = 0 \Rightarrow rgA = 2$	$Si \;\; t = 3 \Rightarrow rgA = 2$

Ejemplo Estudia según el valor del parámetro m el rango de $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 1 & m-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \end{pmatrix}$

El rango de A es, como mínimo 1 y como máximo 3

$$\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2m^2 + 1 - m + m - 6 = 0 = 2m^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

$\forall\ m \neq -2,2 \Rightarrow rgA = 3$

$$Si\ \ m = 2 \Rightarrow rgA = rg \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$Si\ m = -2 \Rightarrow rgA = rg \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplo Estudia según el valor del parámetro m el rango de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & m & m \\ m-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$

El rango de A es, como mínimo 1 y como máximo 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & m \\ m-2 & 1 & 3 \\ 0 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = m(m-2)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

1ª) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall}\ m \neq 0,1,2 \Rightarrow rgA = 3$

2ª) $Si\ \ m = 0 \Rightarrow rgA = rg \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

3ª) $Si\ \ m = 1 \Rightarrow rgA = rg \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

4ª) $Si\ \ m = 2 \Rightarrow rgA = rg \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

D. SISTEMAS

$$\text{Sistemas}\begin{cases}\text{Compatibles (tienen solución)}\begin{cases}\text{Determinados (única solución) S.C.D.}\\ \text{Indeterminados (infinitas soluciones) S.C.I.}\end{cases}\\ \text{Incompatibles (no tienen solución) S.I.}\end{cases}$$

Los sistemas homogéneos (todos los términos independientes iguales a cero) siempre son compatibles.

TEOREMA DE ROUCHÉ - FRÖBENIUS

$$\boxed{rgA \neq rgA^*} \Rightarrow \underset{\text{(NO TIENE SOLUCIÓN)}}{\text{Sistema Incompatible}}$$

$$h < n^o\ de\ \text{incógnitas} \Rightarrow \underset{\text{(TIENE INFINITAS SOLUCIONES)}}{\text{Sistema Compatible Indeterminado}}$$

$$\boxed{rgA = rgA^* = h} \nearrow \searrow$$

$$h = n^o\ de\ \text{incógnitas} \Rightarrow \underset{\text{(TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN)}}{\text{Sistema Compatible Determinado}}$$

REGLA DE CRAMER. Se puede aplicar si:

- **El sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.**
- **El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.**

Ejemplo Regla de Cramer:

$$\begin{cases}x+2y-z=9\\3x+y+2z=2\\2x+z=6\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&2\\2&0&1\end{pmatrix} \qquad \det A=|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&1&2\\2&0&1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

Columna de términos independientes

$$x=\frac{\begin{vmatrix}9&2&-1\\2&1&2\\6&0&1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{35}{5}=7 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&9&-1\\3&2&2\\2&6&1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-15}{5}=-3 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&9\\3&1&2\\2&0&6\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-40}{5}=-8$$

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES QUE DEPENDEN DE UN PARÁMETRO

1. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m.

$$\begin{cases} mx + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ x + my - mz = 1 \end{cases}.$$

a) Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b) Resuélvase el sistema para m = 2

SOLUCIÓN

Matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

a) Discusión

$\boxed{1^\circ}$ $\forall m \neq -1, 2 \Rightarrow rg\ A = 3 = rg\ A^* = \text{nº de incognitas} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

(SOLUCIÓN ÚNICA)

$\boxed{2^\circ}$ $\boxed{m = -1} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} rg\ A = rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 2 \\ rg\ A^* = rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow rg\ A \neq rg\ A^* \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

(NO TIENE SOLUCIÓN)

$\boxed{3^\circ}$ $\boxed{m = 2} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} rg\ A = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 2 \\ rg\ A^* = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0}{=} 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow rg\ A = rg\ A^* = 2 < \text{nº de incognitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

(INFINITAS SOLUCIONES)

b) Resolución para $\boxed{m=2}$

El sistema para m = 2 es $\begin{cases} \cancel{2x+y-3z=5} \\ -x+y+z=-4 \\ x+2y-2z=1 \end{cases} \underset{\text{Resolvemos por Cramer}}{\Rightarrow} \begin{cases} -x+z=-4-y \\ x-2z=1-2y \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} -4-y & 1 \\ 1-2y & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\dfrac{8+2y-1+2y}{1}=4y+7 \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -4-y \\ 1 & 1-2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-1+2y+4+y}{1}=3y+3 \end{array}\right\} \Rightarrow SOLUCIÓN=\begin{cases} x=4\lambda+7 \\ y=\lambda \\ z=3\lambda+3 \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

2. a) Discutir según los valores del parámetro real a el sistema $\begin{cases} ax+3y+z=a \\ x+ay+az=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$.

b) Resolver el sistema anterior en el caso $a=2$.

SOLUCIÓN

$$|A|=0 \Leftrightarrow |A|=\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2a^2+2a+4=0 \Leftrightarrow -a^2+a+2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

a)Discusión $\boxed{1^o}$ $\forall a\neq -1,2 \Rightarrow rg\ A=3=rg\ A^*=$ nº de incognitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado (SOLUCIÓN ÚNICA)

$\boxed{2^o}$ $\boxed{a=-1} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} rg\ A=rg\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0}{=} 2 \\ rg\ A^*=rg\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0}{=} 2 \end{array}\right\} \Rightarrow rg\ A=rg\ A^*=2<\text{nº de incognitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (INFINITAS SOLUCIONES)

$\boxed{3^o}$ $\boxed{a=2} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} rg\ A=rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0}{=} 2 \\ rg\ A^*=rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0}{=} 2 \end{array}\right\} \Rightarrow rg\ A=rg\ A^*=2<\text{nº de incognitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (INFINITAS SOLUCIONES)

b) Resolución para $\boxed{a=2}$

El sistema para a = 2 es $\begin{cases} \cancel{2x+3y+z=2} \\ x+2y+2z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \underset{\text{Resolvemos por Cramer}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+2y=1-2z \\ x+y=1+z \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-2z & 2 \\ 1+z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{1-2z-2(1+z)}{-1}=1+4z \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{1+z-(1-2z)}{-1}=-3z \end{array}\right\} \Rightarrow SOLUCIÓN=\begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

3. a) Discutir según los valores del parámetro real k el sistema homogéneo $\begin{cases} x+ky-z=0 \\ kx-y+z=0 \\ (k+1)x+y=0 \end{cases}$.

b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado

$$|A|=0\Leftrightarrow|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=k^2-k-2=0\Rightarrow\begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases}$$

a) Discusión

$\boxed{1^{\circ}}$ $\forall k\neq-1,2\Rightarrow rg\ A=3=rg\ A^*=$ nº de incognitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado
(SOLUCIÓN TRIVIAL X=Y=Z=0)

$\boxed{2^{\circ}}$ $\boxed{k=-1}\Rightarrow \left. rg\ A=rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\underset{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\neq0}{=}2\right\}\Rightarrow rg\ A=rg\ A^*=2<$ nº de incognitas
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
(INFINITAS SOLUCIONES)

$\boxed{3^{\circ}}$ $\boxed{k=2}\Rightarrow \left. rg\ A=rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\underset{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\neq0}{=}2\right\}\Rightarrow rg\ A=rg\ A^*=2<$ nº de incognitas
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
(INFINITAS SOLUCIONES)

b) Resolución

$\boxed{k = -1}$

El sistema para k = -1 es $\begin{cases} \cancel{x-y-z=0} \\ -x-y+z=0 \underset{y=0}{\Rightarrow} -x+z=0 \Rightarrow z=x \\ y=0 \end{cases}$

$$SOLUCIÓN = \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\boxed{k = 2}$

El sistema para k = 2 es $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ \cancel{2x-y+z=0} \qquad \underset{y=-3x}{\Rightarrow} x+2\cdot(-3x)-z=0 \Rightarrow x-6x=z \Rightarrow z=-5x \\ 3x+y=0 \Rightarrow y=-3x \nearrow \end{cases}$

$$SOLUCIÓN = \begin{cases} x=\mu \\ y=-3\mu \\ z=-5\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$