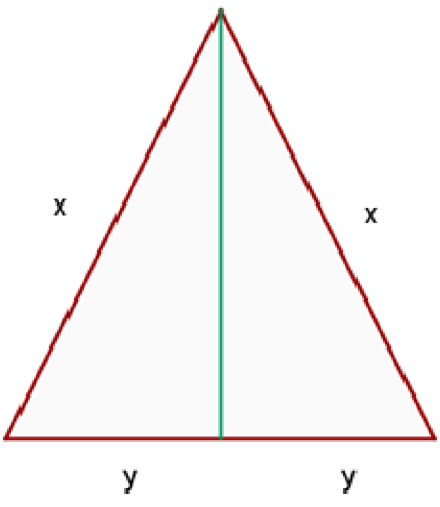
OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Pasos para la resolución de problemas

- Se plantea la función que hay que maximizar o minimizar.
- Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en el caso de que haya más de una variable.
- Se despeja una variable de la ecuación y se sustituye en la función de modo que nos quede una sola variable.
- Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los extremos locales.
- Se realiza la 2ª derivada para comprobar el resultado obtenido.

Ejemplo

De todos los triángulos isósceles de 12 m de perímetro, hallar los lados del que tome área máxima.



La función que tenemos que maximizar es el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$$

Relacionamos las variables:

$2x + 2y = 12$

$x = 6 \quad y$

Sustituimos en la función:

$$S = y\ \sqrt{(6-y)^2 - y^2} = y\sqrt{36-12y} = \sqrt{36y^2 - 12y^3}$$

Derivamos, igualamos a cero y calculamos las raíces.

$$S' = \frac{36y - 18y^2}{\sqrt{36y^2 - 12y^3}} \qquad \frac{36y - 18y^2}{\sqrt{36y^2 - 12y^3}} = 0$$

$$36y - 18y^2 = 0 \qquad y_1 = 0; \quad y_2 = 2$$

Realizamos la 2ª derivada y sustituimos por 2, ya que la solución y = 0 la descartamos porque no hay un triángulo cuyo lado sea cero.

$$S'' = \frac{(36-36y)\cdot\sqrt{36y^2 - 12y^3} - (36y - 18y^2)\cdot\dfrac{72y - 36y^2}{2\sqrt{36y^2 - 12y^3}}}{36y^2 - 12y^3}$$

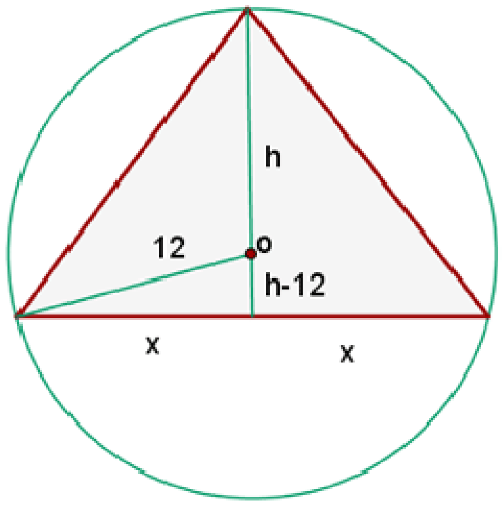
$$S''(2) = \frac{(36-36\cdot 2)\cdot\sqrt{36\cdot 2^2 - 12\cdot 2^3} - (36\cdot 2 - 18\cdot 2^2)\cdot\dfrac{72\cdot 2 - 36\cdot 2^2}{2\sqrt{36\cdot 2^2 - 122^3}}}{36y^2 - 12y^3}$$

$$S''(2) = \frac{(-)\cdot\sqrt{+} - 0\cdot\ldots}{+} = \frac{-}{+} = -$$

Por lo que queda probado que en y = 2 hay un máximo.

La base (2y) mide 4m y los lados oblicuos (x) también miden 4 m, por lo que el triangulo de área máxima sería un **triangulo equilatero**.

1º- Obtener el triángulo isósceles de área máxima inscrito en un círculo de radio 12 cm.



$$S=\frac{1}{2}2xh=xh$$

$$12^2=x^2+(h-12)^2 \qquad x=\sqrt{24h-h^2}$$

$$S=h\sqrt{24h-h^2}=\sqrt{24h^3-h^4}$$

$$S'=\frac{72h^2-4h^3}{2\sqrt{24h^3-h^4}}=\frac{2h\left(36h-2h^2\right)}{2h\sqrt{24h-h^2}}=\frac{36h-2h^2}{\sqrt{24h-h^2}}$$

$$36h-2h^2=0 \qquad h=0 \qquad h=18 \qquad x=6\sqrt{3}$$

Base: $2x=12\sqrt{3}$

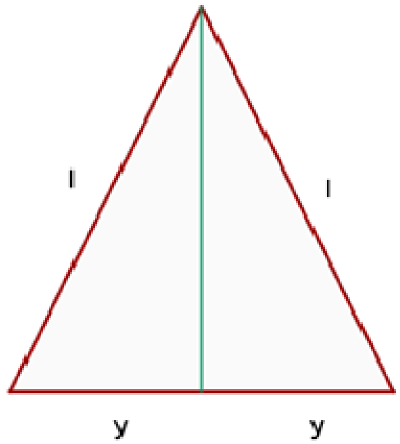
Lado: $l=\sqrt{x^2+h^2}$ $\qquad l=\sqrt{36\cdot 3+18^2}$ $\qquad l=12\sqrt{3}$

$$S''=\frac{(36-4h)\sqrt{24h-h^2}-\left(36h-2h^2\right)\dfrac{24-2h}{2\sqrt{24h-h^2}}}{24h-h^2}$$

$$S''(18)=\frac{\left(36-4\cdot(18)\right)\sqrt{24\cdot(18)-(18)^2}-\left[36\cdot(18)-2(18)^1\right]\dfrac{24-2(18)}{2\sqrt{24\cdot(18)-(18)^2}}}{24\cdot(18)-(18)^2}$$

$$S''(18)=\frac{(-)\cdot(+)-0\cdot\ \ldots}{+}=\frac{(-)-0}{+}=\frac{(-)}{+}=-$$

2º- Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$x=r$ $\qquad$ $l^2=h^2+r^2$

$2l+2x=30$ $\qquad$ $l=15-x$

$(15-x)^2=h^2+r^2$ $\qquad$ $h=\sqrt{225-30x}$

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{225-30x}$$

$$V'=\frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{225-30x}-\frac{15x^2}{\sqrt{225-30x}}\right)=\pi\frac{150x-25x^2}{\sqrt{225-30x}}$$

$$150x - 25x^2 = 0 \qquad x = 0 \qquad x = 6$$

Base = 12 cm

$$V'' = \pi \frac{(150-50x)\sqrt{225-30x} - (150x-25x^2)\frac{-15}{\sqrt{225-30x}}}{225-30x}$$

$$V''(6) = \pi \frac{(150-50\cdot(6))\sqrt{225-30\cdot(6)} - \left[150\cdot(6)-25\cdot(6)^2\right]\frac{-15}{\sqrt{225-30\cdot(6)}}}{225-30\cdot(6)} =$$

$$V''(6) = \frac{(-)\cdot(+)-0\cdot\ldots}{+} = \frac{-}{+} = -$$

3º- Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h \qquad h = \frac{1}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

$$A' = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2+4\pi r^3}{r^2}$$

$$\frac{-2+4\pi r^3}{r^2} = 0 \qquad r^3 = \frac{1}{2\pi}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \qquad h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

$$A'' = \frac{4}{r^3} + 4\pi \qquad A''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) > 0$$

4º- Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.

$$S = 5x^2 + 6y^2$$

$$x + y = 44 \qquad y = 44 - x$$

$$S = 5x^2 + 6(44 - x)^2$$

$$S' = 10x - 12(44 - x) = 22x - 528$$

$$22x - 528 = 0 \qquad x = 24 \qquad y = 20$$

$$S'' = 22 < 0$$

5º- Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

$$S = \pi r^2 + l^2$$

$$2\pi r + 4l = 1 \qquad l = \frac{1 - 2\pi r}{4}$$

$$S = \pi r^2 + \left(\frac{1 - 2\pi r}{4}\right)^2$$

$$S' = 2\pi r + 2\,\frac{1 - 2\pi r}{4}\left(-\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left[r(8 + 2\pi) - 1\right]$$

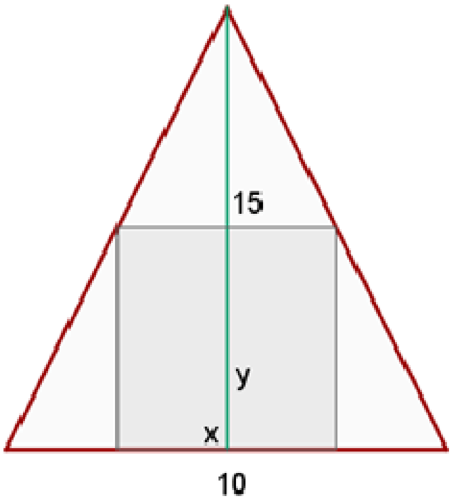
$$\frac{\pi}{4}\left[r\left(8+2\pi\right)-1\right]=0 \qquad r=\frac{1}{8+2\pi}$$

$$\text{Trozo del círculo} = 2\pi\frac{1}{8+2\pi}=0.439\,\text{m}$$

$$\text{Trozo del cuadrado} = 1-0.439=0.561\,\text{m}$$

$$S''=\frac{\pi}{4}\left(8+2\pi\right)>0$$

6º- Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.



$$S=x\cdot y$$

Al tener **dos triángulos semejantes** se cumple que:

$$\frac{x}{10}=\frac{15-y}{15} \qquad x=\frac{2\left(15-y\right)}{3}$$

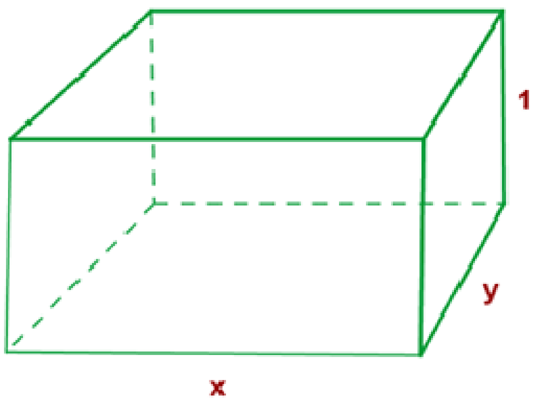
$$S=\frac{2\left(15-y\right)}{3}\cdot y=\frac{2}{3}\left(15y-y^2\right)$$

$$S' = \frac{2}{3}(15-2y) \qquad \frac{2}{3}(15-2y) = 0$$

$$y = \frac{15}{2} \qquad x = 5$$

$$S'' = \frac{2}{3}(-2) < 0$$

7º- Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser 9 m^3, su altura 1 m y el coste de su construcción por m^2 es de 50 € para la base; 60 para la etapa y 40 para cada pared lateral.



$$C(x) = 50xy + 60xy + 40(2x \cdot 1 + 2y \cdot 1)$$

$$C(x) = 110xy + 80(x+y)$$

$$9 = x \cdot y \cdot 1 \qquad y = \frac{9}{x}$$

$$C(x) = 110x\left(\frac{9}{x}\right) + 80\left[x + \left(\frac{9}{x}\right)\right] = 990 + 80\left(x + \frac{9}{x}\right)$$

$$C'(x) = 80\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) \qquad 80\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) = 0$$

$1-\frac{9}{x^2}=0$ $\quad x^2=9$ $\quad x=3$ $\quad y=3$

$C''(x)=\frac{1440}{x^3}>0$

8º- Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.

$V=(80-2x)(50-2x)x=4x^3-260x^2+4000x$

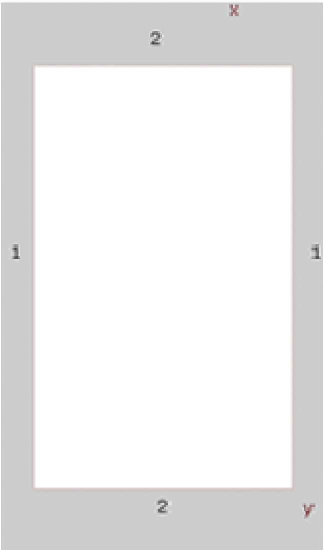
$V'=12x^2-520x+4000$

$12x^2-520x+4000=0$

$x=10$ $\quad x=33.3$ (No es válida: $50-2x<0$)

$V''=24x-520$ $\quad V''(10)=24\cdot 10-520<0$

9º- Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.



$$S = xy$$

$$(x-2)(y-4) = 18 \qquad\qquad y = \frac{4x+10}{x-2}$$

$$S = x\ \frac{4x+10}{x-2} = \frac{4x^2+10x}{x-2}$$

$$S' = \frac{(8x+10)(x-2)-(4x^2+10x)}{(x-2)^2} = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}$$

$$\frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0 \qquad\qquad x = 5 \qquad\qquad x = -1 \text{ (No es válida)}$$

10º-El beneficio neto mensual, en millones de euros, de una empresa que fabrica autobuses viene dado por la función:

$B(x) = 1.2x \quad (0.1x)^3$

donde x es el número de autobuses fabricados en un mes.

$\boxed{1}$ **Calcula la producción mensual que hacen máximo el beneficio.**

$\boxed{2}$ **El beneficio máximo correspondiente a dicha producción.**

$$B(x) = 1.2x - (0.1x)^3$$
$$B'(x) = 1.2 - 3(0.1x)^2 \cdot 0.1 = 1.2 - 0.003x^2$$

$1.2 - 0.003x^2$ $\qquad$ $x^2 = 400$ $\qquad$ $x = 20$

$B''(x) = -0.006x$ $\qquad$ $B''(20) = -0.006 \cdot 20 < 0$

$$B(x) = 1.2 \cdot 20 - (0.1 \cdot 20)^3 = 16 \text{ millones}$$

11º- Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

$\boxed{1}$ La producción actual de la huerta.

Producción actual: 25 · 600 = **15 000** frutos.

$\boxed{2}$ La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.

Si se plantan x árboles más, la producción de cada árbol será: **600 15x**.

$\boxed{3}$ La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

P(x) = (25 + x)(600 15x) = **15 x^2 + 225x + 1500**

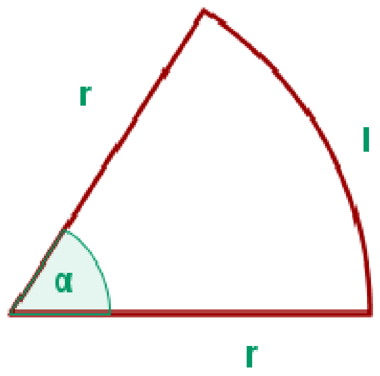
$\boxed{4}$ ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

P′(x) = 0 x + 225 30x + 225 = 0 **x = 7.5**

P′′ (x) = 30 < 0

La producción será máxima si la huerta tiene 25 + 7 = **32** o 25 + 8 = **33 árboles**

12º- Un sector circular tiene un perímetro de 10 m. Calcular El radio y la amplitud del sector de mayor área.



$S = \frac{1}{2} l \cdot r \qquad l = \alpha \cdot r$

$2r + l = 10 \quad l = 10 - 2r$

$S = \frac{1}{2}(10 - 2r) \cdot r = 5r - r^2$

$S' = 5 - 2r \qquad 5 - 2r = 0 \quad r = \frac{5}{2}$

$r = \frac{5}{2}\text{m} \qquad l = 5\text{m} \qquad \alpha = 2\text{rad}$

$S'' = -2 < 0$