

Pág. 77

a) CALCULA $M(4)$

b) DIVIDE $M(x) : (x-4)$

c) COMPRUEBA
QUE LA MISMA
CUENTA SIRVE
PARA a) y b)

2) $M(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 7x + 8$

a) $M(4) = 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 8 = 256 - 512 + 240 + 28 + 8 = 20$

b)

	1	-8	15	7	8
4		4	-16	-4	12
	1	-4	-1	3	20

c) Efectivamente, como postula el teorema del resto, el valor numérico de un polinomio para un número a , $P(a)$, coincide con el resto de la división del polinomio entre $(x-a)$. En este caso, la operación es mucho más rápida por Ruffini.

3) Si el valor de un polinomio $A(x)$ para $x=7$ es 54.
¿Qué podemos decir de la división $A(x) : (x-7)$?
Que tiene un resto de 54.

4) De un polinomio $H(x)$ sabemos $H(5)=18$ y que $H(-5)=13$.

a) ¿Cuál es el resto de $H(x) : (x-5)$?

El resto es 18

b) ¿Y el de $H(x) : (x+5)$?

El resto es 13.

5] $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 9x + 3$

$Q(x) = x^4 - 12x^2 - 11x + 9$

Calcular mediante "Ruffini": a) $P(3)$ b) $P(-1)$ c) $Q(3)$ d) $Q(-1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} a) & 3 & -5 & -9 & 3 \\ & 3 & 9 & 12 & 9 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & 12 \end{array}$$

Resto: 12

$$\begin{array}{r|rrrr} b) & 3 & -5 & -9 & 3 \\ & -1 & -3 & 8 & 1 \\ \hline & 3 & -8 & -1 & 4 \end{array}$$

Resto: 4

$$\begin{array}{r|rrrrr} c) & 1 & 0 & -12 & -11 & 9 \\ & 3 & 3 & 9 & -9 & -54 \\ \hline & 1 & 3 & -3 & -18 & -45 \end{array}$$

Resto: 111

$$\begin{array}{r|rrrrr} d) & 1 & 0 & -12 & -11 & 9 \\ & -1 & -1 & 1 & 11 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & -11 & 0 & 9 \end{array}$$

Resto: 9

6] Calcular mediante "Ruffini" $P(-2)$, $P(-3)$ y $P(5)$ para $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ & -2 & -4 & 22 & -10 \\ \hline & 2 & -11 & 5 & 0 \end{array}$$

$P(-2) = 0$ (-2 es raíz)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ & -3 & -6 & 39 & -66 \\ \hline & 2 & -13 & 22 & -56 \end{array}$$

$P(-3) = -56$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ & 5 & 10 & 15 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$P(5) = 0$ (5 es raíz)

7] Sabemos que para un polinomio $P(x)$, $P(8) = 0$

¿Qué se puede decir de $P(x) : (x-8)$

Que su resto es 0, es decir, que la división es exacta y que, por tanto, $(x-8)$ es un factor de $P(x)$.

Pág. 79

1) AVERIGUA SI 1, -3, 5, -7 ES ALGUNO RAÍZ DE $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 5X - 4$

Podemos hacerlo de dos formas: hallar el valor numérico para cada número ^{y ver si da cero}, o bien dividir entre $(x-a)$, siendo a el número, y ver si da exacto.

• $x=1 \rightarrow 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 4 = 1 - 4 + 2 + 5 - 4 = 0$; 1 es raíz

• $x=-3 \rightarrow (-3)^4 - 4(-3)^3 + 2(-3)^2 + 5(-3) - 4 = 81 - 108 + 18 - 10 - 4 = 23 \neq 0$
-3 no es raíz

• $x=5 \rightarrow$ más cómodo por Ruffini en este caso

	1	-4	2	5	-4	
5		5	5	35	200	
	1	1	7	40	196	$\neq 0$

5 no es raíz

	1	-4	2	5	-4	
-7		-7	77	-553	3836	
	1	-11	79	-548	3832	$\neq 0$

-7 no es raíz

2) HALLA LAS RAÍCES DE $P(x) = (x-2)(x+5)(x-6)$

Las raíces son: $x=2$, $x=-5$ y $x=6$ (es inmediato)

3) ESCRIBE UN POLINOMIO DE TERCER GRADO QUE TENGA LAS RAÍCES 2, -2 y 3.

$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)$

CALCULA LAS RAÍCES DE LOS POLINOMIOS:

4) a) $x^2 - x = x(x-1) \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

b) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \rightarrow x=1$

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0
-1		-1	-1	0
	1	0	0	0

No tiene más raíces enteras ni reales

	1	0	0	1
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	0
1		1	0	1
	1	0	1	1

c) $x^4 + x = x(x^3+1) = x(x+1)(x^2-x+1) \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$
No más raíces enteras

BUSCA RAÍCES ENTERAS DE LOS POLINOMIOS

5) $A(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x + 7 = (x+1)(4x^2 - 2x + 7) \rightarrow x = -1$

No tiene raíces reales

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & & -4 & 2 & -7 \\ \hline & 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}$$

$B(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \rightarrow$ No tiene raíces enteras

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}$$

$C(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 7x + 3 = (x-3)(x^3 + x^2 + 2x - 1) \rightarrow x = 3$

No tiene raíces enteras

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -1 & -7 & 3 \\ 3 & & 3 & 3 & 6 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 3 & \\ -1 & & -1 & 0 & -2 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & -3 & \end{array}$$

$D(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^4 + x^2 + 1) \rightarrow x = -1$

no tiene raíces reales

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

6) CALCULA POR TANTEO LAS RAÍCES DE $x^3 + 2x^2 - 8x$ SABIENDO QUE SON TRES Y TODAS ENTERAS.

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x \rightarrow$ de entrada $x=0$ es raíz (no hay término independiente).

Probando con 2: $2^3 + 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = 8 + 8 - 16 = 0 \rightarrow x = 2$

Y con -2: $(-2)^3 + 2(-2)^2 - 8(-2) = -8 + 8 + 16 = 16$; $x = -2$ no es raíz

Con -4: $(-4)^3 + 2(-4)^2 - 8(-4) = -64 + 32 + 32 = 0 \rightarrow x = -4$

Pág. 81

FACTORIZA

1) a) $x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9) = x(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) =$

$= x \cdot (x + 3)^2$

Este paso lo escribo sólo para mostrar que hay dos cuadrados y el doble del primero por el segundo

cuadrado de la suma

Sólo para mostrar que es el cuadrado de la diferencia

b) $2x^3 - 4x^2 + 2x = 2x(x^2 - 2x + 1) = 2x(x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2) =$

$= 2x(x - 1)^2$

Sólo para mostrar que es la suma por la diferencia

c) $3x^4 - 12x^2 = 3x^2(x^2 - 4) = 3x^2(x^2 - 2^2) = 3x^2(x + 2)(x - 2)$

cuadrado de la diferencia

d) $8x^5 - 24x^4 + 18x^3 = 2x^3(4x^2 - 12x + 9) = 2x^3((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2) =$

$= 2x^3(2x - 3)^2$

FACTORIZA UTILIZANDO "RUFFINI"

2) a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; $\text{div}(-6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0

b) $2x^3 + 6x^2 - x - 30$; $\text{div}(30) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 6, -6, 10, -10, 15, -15, 30, -30\}$

	2	6	-1	30
-1		-2	-4	5
	2	4	-5	35

	2	6	-1	30
1		2	8	7
	2	8	7	37

No tiene

raíces enteras aunque probásemos con todos los divisores.

c) $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ $\text{div}(8) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 14 & 8 \\ -2 & & -2 & -10 & -8 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x+2)(x+1)(x+4)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 5 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

d) $3x^5 + x^2 - 24x + 36$; $\text{div}(36) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36, -36\}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & 0 & 0 & 1 & -24 & 36 \\ 1 & & 3 & 3 & 3 & 4 & 20 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 4 & -20 & 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & 0 & 0 & 1 & -24 & 36 \\ -1 & & -3 & 3 & -3 & 2 & 22 \\ \hline & 3 & -3 & 3 & -2 & -22 & 58 \end{array}$$

...
No tiene raíces enteras.

3 DESCOMPON AL MÁXIMO

a) $2x^4 - 12x^3 + 10x^2 = 2x^2(x^2 - 6x + 5) = 2x^2(x-1)(x-5)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & 5 \\ 1 & & 1 & -5 \\ \hline & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

b) $5x^3 + 10x^2 + 25x = 5x^2(x + 2x^2 + 5)$, se queda así

no tiene raíces enteras

c) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$, se queda así

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

d) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9 = (x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x+3) = (x-1)^2(x-3)(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -8 & 18 & -9 \\ 1 & & 1 & -9 & 9 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & -9 & 9 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 & -9 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 3 & & 3 & 9 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

e) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $\text{div}(1) = \{1, -1\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)(x+1)(x+1) = (x+1)^3$$

f) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; $\text{div}(8) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} +2 & 1 & -6 & 12 & -8 \\ & & +2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & & \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)(x-2)(x-2) = (x-2)^3$$

4 SIMPLIFICA

a) $\frac{5x^3 + 20x^2}{3x^3 - 24x^2 + 48x} = \frac{5x^2(x+4)}{3x(x^2 - 8x + 16)} = \frac{5x(x+4)}{(x-4)^2}$
 $x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x-4)^2$

b) $\frac{x^2 + 7}{x^3 - 3x^2 + 7x - 21} = \frac{x^2 + 7}{(x-3)(x^2 + 7)} = \frac{1}{x-3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 7 & -21 \\ & & 3 & 0 & 21 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & 0 \end{array}$$