

Sucesiones. Término general

Se trata de sustituir la n

[1] a) $a_n = \frac{n}{2} - 5$; $a_{10} = \frac{10}{2} - 5 = 5 - 5 = 0$; $a_{25} = \frac{25}{2} - 5 = 12,5 - 5 = 7,5$
 b) $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$; $b_{10} = \frac{10^2 - 1}{10} = \frac{99}{10} = 9,9$; $b_{25} = \frac{25^2 - 1}{25} = \frac{624}{25} = 24,96$
 c) $c_n = (-1)^n + \frac{1}{2}$; $c_{10} = (-1)^{10} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$; $c_{25} = (-1)^{25} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$
 d) $d_n = \frac{n + n \cdot (-1)^n}{2}$; $d_{10} = \frac{10 + 10 \cdot (-1)^{10}}{2} = \frac{10 + 10}{2} = 10$; $d_{25} = \frac{25 + 25 \cdot (-1)^{25}}{2} = \frac{0}{2} = 0$
 e) $e_n = n \cdot (n - 2)$; $e_{10} = 10 \cdot (10 - 2) = 80$; $e_{25} = 25 \cdot (25 - 2) = 575$
 f) $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2^n$; $f_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot 2^{10} = \frac{1}{2^9} \cdot 2^{10} = 2^{-9+10} = 2^1 = 2$
 $f_{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \cdot 2^{25} = \frac{1}{2^{24}} \cdot 2^{25} = 2^{-24+25} = 2^1 = 2$

[2] a) $a_1 = 1$; $a_n = 2a_{n-1} + 3$
 $a_1 = 1$; $a_2 = 2a_{2-1} + 3 = 2a_1 + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$; $a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$
 $a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$; $a_5 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$, o bien $a: 1, 5, 13, 29, 61, \dots$

b) $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$
 $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 3 : 2 = \frac{3}{2} (= 1,5)$; $a_4 = \frac{3}{2} : \frac{3}{1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} (= 0,5)$
 $a_5 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} (= 0,33)$ o bien $a: 2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

c) $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$
 $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 3 \cdot 2 = 6$; $a_4 = 6 \cdot 3 = 18$; $a_5 = 18 \cdot 6 = 108$
 o bien $a: 2, 3, 6, 18, 108, \dots$

[3] a) $11, 9, 7, 5, \dots \rightarrow$ el término anterior menos 2 unidades,
 $a_n = 11 - (n-1) \cdot d \rightarrow 11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rightarrow$ el término anterior por $\frac{1}{2}$
 $b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \dots$

c) 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; ... $\rightarrow$ el término anterior más 0,4.

$$c_n = 2,5 + (n-1) \cdot 0,4 \rightarrow 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; 4,1; 4,5; 4,9; 5,3; \dots$$

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow$ dividiendo 1 entre n en cada término.

$$d_n = \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

e) 8, 12, 18, 27, ... $\rightarrow$ multiplicando el término anterior por 1,5.

$$e_n = 8 \cdot 1,5^{n-1} \rightarrow 8, 12, 18, 27, 40,5, 60,75, 91,125, \dots$$

f) 0, 3, 8, 15 $\rightarrow$ restando 1 a cada número natural al cuadrado.

$$f_n = n^2 - 1 \rightarrow 1, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \dots$$

$\rightarrow$ podría definirse también con ley de recurrencia tomando $a_1 = 12$ y $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

[4] a) 12, 14, 16, 18, ... $\rightarrow a_n = 10 + 2n$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \rightarrow b_n = \frac{n}{n+1}$

c) 1, 3, 9, 27, ... $\rightarrow c_n = 3^{n-1}$

d) 1·2, 2·3, 3·4, 4·5, ... $\rightarrow d_n = n \cdot (n+1)$

Son más difíciles de obtener que las que se definen con término general porque no sabemos hasta qué término se define "de antemano", y podría haber otras soluciones.

[5] a) 8, 10, 2, -8, -10, ... $\rightarrow a_1 = 8, a_2 = 10, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

b) 4, 1, 3, -2, 5, ... $\rightarrow b_1 = 4, b_2 = 1, a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

c) 1, 2, 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 2, \dots \rightarrow c_1 = 1, c_2 = 2, c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}$

d) 7, 9, 12, 16, 21, ... $\rightarrow a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + n$

Progresiones

[6] a) $a_1 = 1,5; d = 2 \rightarrow a_n = 1,5 + (n-1) \cdot 2$

$$a_1 = 1,5 + 0 \cdot 2 = 1,5$$

$$a_2 = 1,5 + 1 \cdot 2 = 3,5$$

$$a_3 = 1,5 + 2 \cdot 2 = 5,5$$

$$a_4 = 1,5 + 3 \cdot 2 = 7,5$$

$$S_{20} = \frac{(1,5 + 39,5) \cdot 20}{2} = 410$$

$$a_{20} = 1,5 + 19 \cdot 2 = 39,5$$

$$b) b_1 = 32; d = -5 \rightarrow b_n = 32 + (n-1) \cdot (-5)$$

$$b_1 = 32 + 0 \cdot (-5) = 32$$

$$b_2 = 32 + 1 \cdot (-5) = 27$$

$$b_3 = 32 + 2 \cdot (-5) = 22$$

$$b_4 = 32 + 3 \cdot (-5) = 17$$

$$S_{20} = \frac{(32 + (-63)) \cdot 20}{2} = \frac{-31 \cdot 20}{2} = -310$$

$$b_{20} = 32 + 19 \cdot (-5) = 32 - 95 = -63$$

$$c) c_1 = 5; d = 0,5 \rightarrow c_n = 0,5 + (n-1) \cdot 0,5$$

$$c_1 = 5 + 0 \cdot 0,5 = 5$$

$$c_2 = 5 + 1 \cdot 0,5 = 5,5$$

$$c_3 = 5 + 2 \cdot 0,5 = 6$$

$$c_4 = 5 + 3 \cdot 0,5 = 6,5$$

$$S_{20} = \frac{(5 + 14,5) \cdot 20}{2} = 195$$

$$c_{20} = 5 + 19 \cdot 0,5 = 14,5$$

→ le llamo s para que no se confunda la d con la d de diferencia (el nombre es irrelevante)

$$d) s_1 = -3; d = -4$$

$$s_1 = -3 + 0 \cdot (-4) = -3$$

$$s_2 = -3 + 1 \cdot (-4) = -7$$

$$s_3 = -3 + 2 \cdot (-4) = -11$$

$$s_4 = -3 + 3 \cdot (-4) = -15$$

$$s_n = -3 + (n-1) \cdot (-4)$$

$$S_{20} = \frac{(-3 + (-79)) \cdot 20}{2} = -820$$

$$s_{20} = -3 + 19 \cdot (-4) = -3 - 76 = -79$$

$$\boxed{7} a) 25, 18, 11, 4, \dots$$

Podemos desarrollarlo hasta el final, si queremos:

$$a_n = 25 + (-7n + 7) = 25 - 7n + 7 = 32 - 7n$$

$$\text{finalmente: } a_n = 32 - 7n$$

$$d = -7; a_n = 25 + (n-1) \cdot (-7)$$

$$a_{15} = 25 + 14 \cdot (-7) = 25 - 98 = -73$$

$$S_{15} = \frac{[25 + (-73)] \cdot 15}{2} = \frac{-48 \cdot 15}{2} = -24 \cdot 15 = -360$$

$$b) -13, -11, -9, -7, \dots$$

$$d = 2; b_n = -13 + (n-1) \cdot 2$$

$$b_{15} = -13 + 14 \cdot 2 = -13 + 28 = 15$$

$$S_{15} = \frac{(-13 + 15) \cdot 15}{2} = \frac{2 \cdot 15}{2} = 15$$

$$c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; \dots$$

$$d = 0,5; c_n = 1,4 + (n-1) \cdot 0,5; c_{15} = 1,4 + 14 \cdot 0,5 = 8,4$$

$$S_{15} = \frac{(1,4 + 8,4) \cdot 15}{2} = \frac{9,8 \cdot 15}{2} = 73,5$$

d) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots$

$$d = -\frac{1}{4}; \quad S_n = \frac{3}{4} + (n-1)\left(-\frac{1}{4}\right); \quad S_{15} = \frac{3}{4} + 14\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{14}{4} = -\frac{11}{4}$$

$$S_{15} = \frac{\left[\frac{3}{4} + \left(-\frac{11}{4}\right)\right] \cdot 15}{2} = \frac{-\frac{8}{4} \cdot 15}{2} = \frac{-2 \cdot 15}{2} = -15$$

8) a) $a_1 = 0,3; \quad r = 2$

$$a_1 = 0,3; \quad a_2 = 0,3 \cdot 2 = 0,6; \quad a_3 = 0,6 \cdot 2 = 1,2; \quad a_4 = 1,2 \cdot 2 = 2,4$$

$$a_n = 0,3 \cdot 2^{n-1}$$

b) $b_1 = -3; \quad r = \frac{1}{2}$

$$b_1 = -3; \quad b_2 = -3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; \quad b_3 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}; \quad b_4 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$b_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

c) $c_1 = 200; \quad r = -0,1$

$$c_1 = 200; \quad c_2 = 200 \cdot (-0,1) = -20; \quad c_3 = -20 \cdot (-0,1) = 2; \quad c_4 = 2 \cdot (-0,1) = -0,2$$

$$c_n = 200 \cdot (-0,1)^{n-1}$$

d) $d_1 = \frac{1}{81}; \quad r = 3$

$$d_1 = \frac{1}{81}; \quad d_2 = \frac{1}{81} \cdot 3 = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}; \quad d_3 = \frac{1}{27} \cdot 3 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}; \quad d_4 = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$d_n = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1} \rightarrow \text{y si queremos } d_n = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{3^4} \cdot 3^{n-1} = \frac{3^{n-1-4}}{3^4} = 3^{n-5}$$

Y así, con $d_n = 3^{n-5}$ salen, igualmente, todos los términos de la progresión.

9) a) $20; 8; 3,2; 1,28; \dots$

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$; puedo usar indistintamente la fracción irreducible o el número decimal

compruebo que se cumple para el resto $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 0,4$

Como sí se cumple, es una progresión geométrica de razón 0,4

Entonces: $a_n = 20 \cdot 0,4^{n-1}$, o bien: $a_n = 20 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

b) $5; 6; 7,2; 8,64; \dots$

$\frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{5} = 1,2$; como se cumple con cualquiera $\left(\frac{b_n}{b_{n-1}} = 1,2\right)$, $b_n = 5 \cdot 1,2^{n-1}$

c) $0,7; 0,07; 0,007; \dots$

$\frac{c_2}{c_1} = \frac{0,07}{0,7} = 0,1$, como se cumple para todos, $r = 0,1$ y $c_n = 0,7 \cdot 0,1^{n-1}$

d) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, \dots$

$\frac{d_2}{d_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = -3$, como se cumple para todos, $r = -3$ y $d_n = \frac{1}{6} \cdot (-3)^{n-1}$

10 a) $3, -6, 12, -24, \dots$

Como es geométrica, $r = \frac{-6}{3} = -2$, entonces $S_{10} = \frac{3 \cdot [(-2)^{10} - 1]}{-2 - 1} = \frac{3 \cdot (1024 - 1)}{-3} = 1023$

b) $0,7; 1,4; 2,8; 5,6; \dots$

Como es geométrica, $r = \frac{1,4}{0,7} = 2$, entonces $S_{10} = \frac{0,7 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 0,7 \cdot 1023 = 716,1$

c) $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

Como es geométrica, $r = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$, entonces $S_{10} = \frac{\frac{2}{3} \cdot ((\frac{3}{2})^{10} - 1)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (1,5^{10} - 1)}{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{4}{3} (1,5^{10} - 1) = 75,55$

d) $100; 20; 4; 0,8; \dots$

$r = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,2$, entonces $S_{10} = \frac{100 \cdot (0,2^{10} - 1)}{0,2 - 1} = \frac{100 \cdot (1,024 \cdot 10^{-7} - 1)}{-0,8} = 125$

11 a) $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \dots$

$r = \frac{1}{3}$; $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$

b) $18; 16,2; 14,58; 13,122$

$r = 0,9$; $S_{\infty} = \frac{b_1}{1-r} = \frac{18}{1-0,9} = \frac{18}{0,1} = 18 \cdot 10 = 180$

"Aplica lo aprendido"

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \dots$ $\rightarrow$ Progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{8}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{11}{8} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{8}{8} & \frac{9}{8} & \frac{10}{8} & \frac{11}{8} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ +\frac{1}{8} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{8} & \end{array}$$

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{8} = 1 + \frac{n}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} - \frac{1}{8}n = \frac{1}{8}(7-n)$$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

- $b_2 - b_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$
- $b_3 - b_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \neq \sqrt{2} - 1$ $\rightarrow$ No es progresión aritmética
- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = \sqrt{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\rightarrow$ No es progr. geométrica

No es una progresión. El término general es: $b_n = \sqrt{n}$

c) $0,2; 0,02; 0,002; \dots$

$$r = \frac{0,02}{0,2} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-1}} = 10^{-2-(-1)} = 10^{-1} = 0,1, \text{ (se cumple en el resto también)}$$

Progresión geométrica de razón $r = 0,1$ y término general: $c_n = 0,2 \cdot (0,1)^{n-1}$

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$

- $d_2 - d_1 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$
- $d_3 - d_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{8}{6} - \frac{9}{6} = -\frac{1}{6}$
- $\frac{d_2}{d_1} = \frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{4}$
- $\frac{d_3}{d_2} = \frac{4/3}{3/2} = \frac{8}{9}$

No es progr. aritmética $\rightarrow$ No es progr. geométrica

No es una progresión. El término general es: $d_n = \frac{n+1}{n}$

e) $22; -11; 5,5; -2,75; \dots$

$r = \frac{-11}{22} = -\frac{1}{2}$ (se cumple en todas) $\rightarrow$ Progresión geométrica de razón $-\frac{1}{2}$ y término general: $22 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

f) $18, 13, 8, 3, \dots$

$13-18=-5$
 $8-13=-5$ $\rightarrow$ se cumple en todas

$\rightarrow$ Progresión aritmética de diferencia $d=-5$ y término general: $f_n = 18 + (n-1) \cdot (-5) = 18 - 5n + 5 = 23 - 5n$

13 $a_3 = 6$, $a_9 = 15$, ¿42?

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \dots \\
 \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \\
 +d & +d & & +d & +d & +d & +d & +d & +d & \\
 & & \downarrow & & & & & & \downarrow & \\
 & & 6 & +d & +d & +d & +d & +d & +d & = 15
 \end{array}$$

Cálculo de d : $6 + 6d = 15$; $6d = 15 - 6$; $6d = 9$; $d = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Cálculo de a_1 : $a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d = a_1 + 2 \cdot \frac{3}{2} = a_1 + 3 = 6$; $a_1 = 3$
 $\hookrightarrow a_3 = 6$, dato del ejerc.

$$42 = a_1 + (n-1) \cdot d = 3 + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3n}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3n}{2}$$

¡Am $42 = \frac{3}{2} + \frac{3n}{2}$; $42 - \frac{3}{2} = \frac{3n}{2}$; $\frac{84}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3n}{2}$;

¡ $\frac{81}{2} = \frac{3}{2}n$; $n = \frac{81}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{81}{3}$; $n = 27$

El término que tiene un valor de 42 es a_{27} .

14 $a_1 = 5$, $a_7 = 32$, ¿cuál es la diferencia, d ?

$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot d$$

$$32 = 5 + 6 \cdot d$$

$$32 - 5 = 6d$$

$$27 = 6d$$

$$d = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$