

Parte II. DERIVADAS. APLICACIONES.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA.

Se dice que f es derivable en $x = a$ si existe el límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Este número se denomina **derivada de f en a** y se designa por $f'(a)$. Decimos que la función f es derivable si es derivable en todos los puntos de su dominio. Es decir

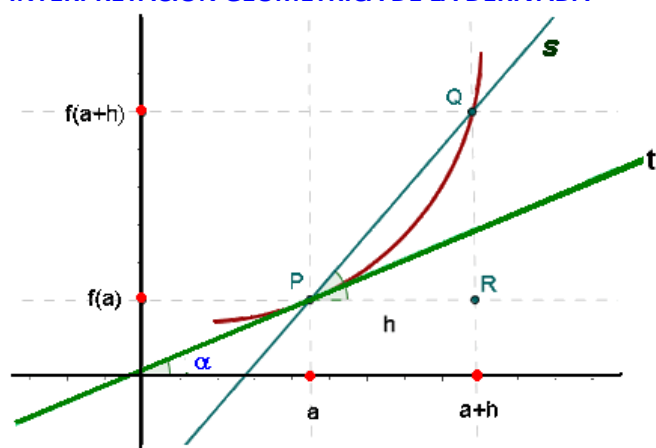
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Recuerda que el cociente $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es la TVM $f[a, a+h]$

Si hacemos el cambio de variable $a+h=x \Rightarrow$ si $h \rightarrow 0$, entonces $x \rightarrow a$, y

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA



$$\text{pendiente de } s = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pendiente de $t = \tan \alpha = f'(a)$

Recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$:
 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Recta normal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

FUNCIÓN DERIVADA

La función que a cada número x del dominio de f le asigna el número $f'(x)$, si existe, se llama **función derivada de f** o, simplemente, derivada de f , y se representa por f' .

También se puede hablar de la función derivada de f' , que se llama **derivada segunda** y se representa por $f''(x)$.

También se puede hablar de $f'''(x)$ (derivada tercera de f) ... $f^{(n)}(x)$ (derivada n -ésima de f)

DERIVADAS LATERALES. La derivada es un límite y ese límite existe si existen y son iguales los dos límites laterales. Éstos se llaman "**derivada lateral de f en $x = a$ por la izquierda (derecha)**".

Derivada por la izquierda

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada por la derecha

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

No se debe confundir $f'(a^-)$ con $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$

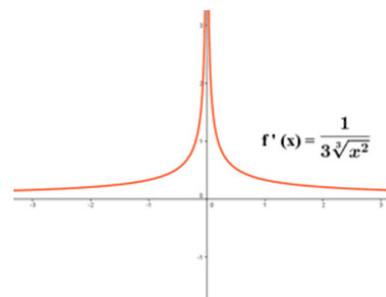
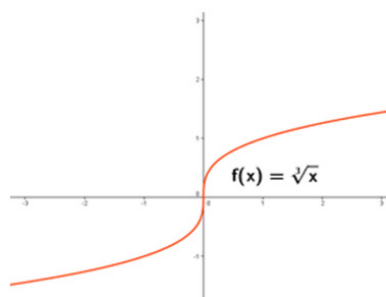
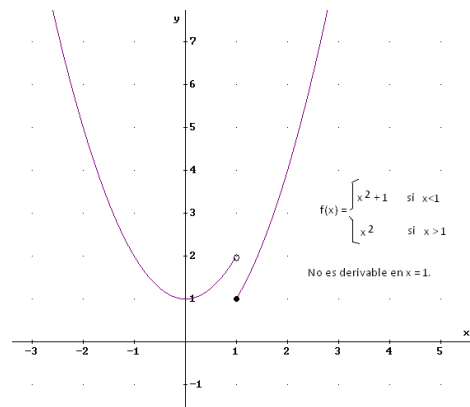
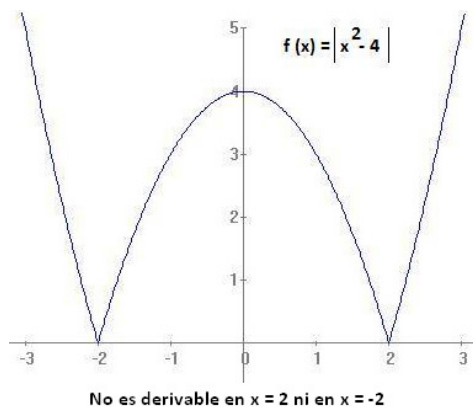
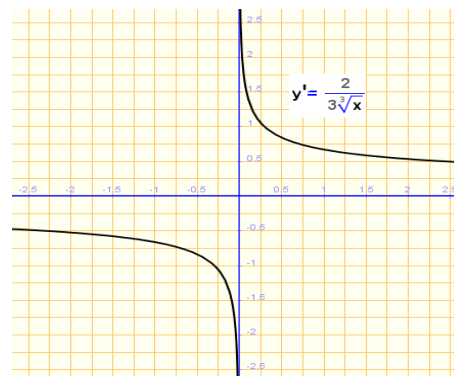
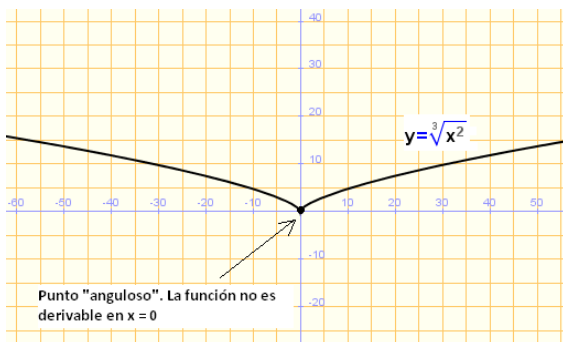
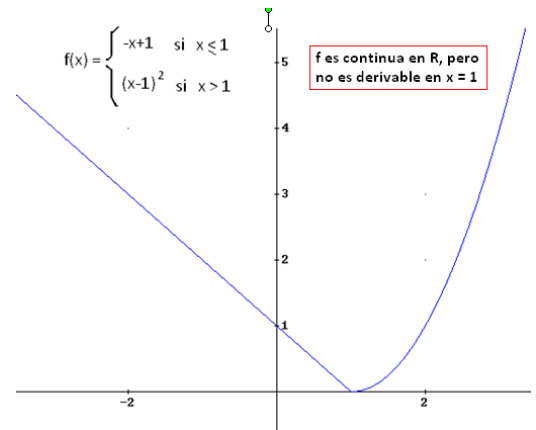
Por tanto f es derivable en $x = a$ si y sólo si existen y son iguales los límites $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$. Si son iguales si f es continua

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

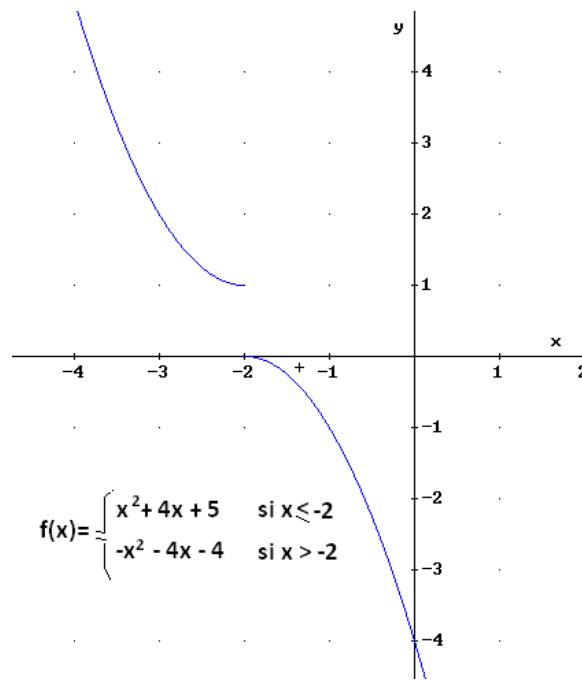
f derivable en $x = a \rightarrow f$ continua en $x = a$

f no continua en $x = a \rightarrow f$ no derivable en $x = a$

- Las funciones conocidas son continuas y derivables en su dominio.
- Aparecen puntos angulosos, en los que la función no es derivable, cuando se utiliza la función valor absoluto, en algunos radicales en el punto donde el radicando es cero o en las funciones definidas a trozos. También pueden aparecer puntos donde la función tiene tangente vertical.



El límite de la función $f'(x)$ cuando x tiende a 0 es infinito, luego la recta tangente en $x = 0$ es vertical. Es decir, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.



- Si f es continua en $x = a$ y existe $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = b$ entonces $f'(a^-) = b$
- Así pues si f es continua en $x = a$ y existe $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = b$ entonces $f'(a) = b$
- Si existen $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ y no son iguales, entonces f no es derivable en a , pues $f'(a^-) \neq f'(a^+)$.

REGLAS DE CÁLCULO DE DERIVADAS.

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ (Demostrada)
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	

Función simple	Derivada	Función compuesta	Derivada
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{1}{f(x)} \quad f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x)e^{f(x)}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$	$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y = f'(x) \cos f(x)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -f'(x) \operatorname{sen} f(x)$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x)[1 + \operatorname{tg}^2 f(x)]$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \operatorname{arcsen} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
		$y = f(x)^{g(x)}$	$y' = [g'(x) \cdot \operatorname{Lf}(x) + g(x) \cdot f'(x) / f(x)] f(x)^{g(x)}$ Hacer con derivación logarítmica

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES.

La representación gráfica la obtendremos siguiendo las etapas:

- I. Dominio y continuidad.
- II. Puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas.
- III. Simetrías. Periodicidad.
- IV. Asintotas.
- V. Puntos singulares. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Máximos y mínimos.
- VI. Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Estas etapas, en general, nos ayudan a construir la gráfica de las funciones, pero en alguno de los casos no es necesario acudir a todas ellas para representar la función, que es, en definitiva, lo que nos interesa. También es importante recordar que, a veces, tomando valores, con unos pocos puntos, se avanza muy rápidamente en la representación gráfica de la función.

Dominio y continuidad

Las funciones polinómicas, las exponenciales (a^x), $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\sqrt[n]{x}$ con n impar, están definidas en todo $\mathbb{R}$. ¡Ojo! El dominio de $f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$ será el dominio de $g(x)$. El dominio de $f(x) = a^{g(x)}$ será el dominio de $g(x)$, etc.

- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow \operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0\}$
- $f(x) = \operatorname{tg} x \rightarrow \operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$
 $f(x) = \operatorname{tg}(g(x)) \rightarrow \operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$
- $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ ó $f(x) = \operatorname{arccos} x \rightarrow \operatorname{Dom} f = [-1, 1]$
 $f(x) = \operatorname{arcsen}(g(x))$ ó $f(x) = \operatorname{arccos}(g(x)) \rightarrow \operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in [-1, 1]\};$
- $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ con n par $\rightarrow \operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$
- $f(x) = \log_a g(x)$ con $a > 0$ $a \neq 1 \rightarrow \operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) > 0\}$

Ejemplos:

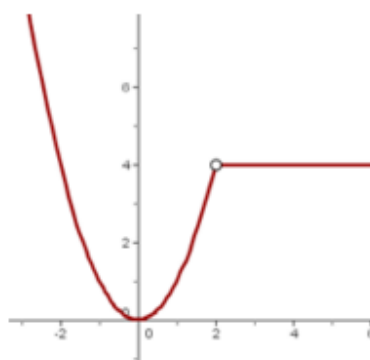
- En la función $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-4x+3}$, el denominador se anula para los valores $x=1$, $x=3$, luego el campo de existencia consistirá en todos los números reales excepto el 1 y el 3: $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ o también $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$.
- Si consideramos la función $f(x) = \sqrt{4-2x^2}$, debemos excluir los valores que verifiquen $4-2x^2 < 0$, es decir, serán válidos los puntos x que cumplan $4-2x^2 \geq 0$. Así el campo de existencia estará formado por todos los números reales comprendidos entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$: $\operatorname{Dom} f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
- Para la función $f(x) = \ln(2x-1)$, excluimos los valores que verifiquen $2x-1 \leq 0$, es decir, los puntos tales que $x \leq \frac{1}{2}$; luego el campo de existencia estará formado por todos los números reales mayores que $\frac{1}{2}$: $\operatorname{Dom} f = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Los modelos de funciones que conocemos son continuos en todo su dominio. Hay que estudiar con cuidado la continuidad en las funciones definidas a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

$$\nexists f(2)$$



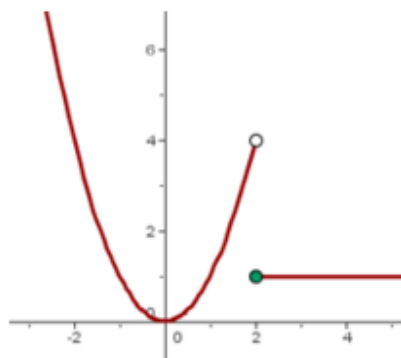
La función presenta una discontinuidad evitable en $x = 2$ porque tiene límite, pero no tiene imagen.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

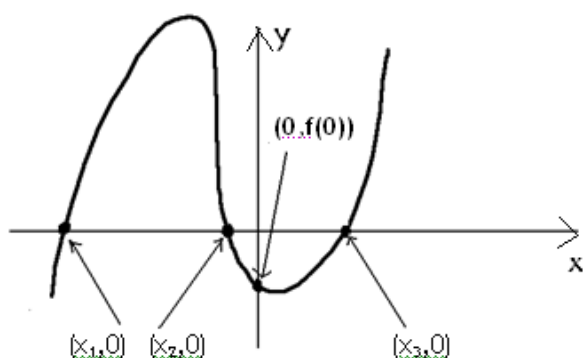
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1$$

$$f(2) = 1$$



En $x = 2$ hay una discontinuidad de salto finito

Puntos de corte con los ejes



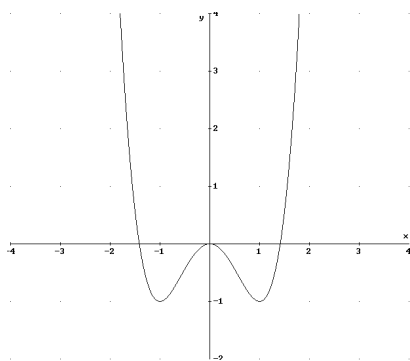
Con el **eje Y**: $(0, f(0))$ Si existe es ÚNICO

Con el **eje X**: $(x_i, 0)$ Para hallar las abscisas se resuelve la ecuación $f(x) = 0$;

Ejemplos:

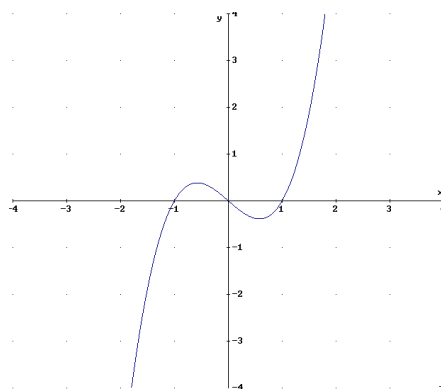
- Consideremos la función $f(x) = x^2 - x - 2$; su corte con el eje de ordenadas se obtiene haciendo $x = 0$, luego $y = f(0) = -2$ y el punto de corte es el $(0, -2)$. Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen resolviendo $y = 0$, es decir, $x^2 - x - 2 = 0$ y los puntos de corte son el $(-1, 0)$ y el $(2, 0)$.
- En la función $f(x) = \ln(2x + 3)$; su corte con el eje de ordenadas será el punto $(0, \ln 3)$. Con el eje de abscisas se obtienen resolviendo $y = 0$, es decir, $2x + 3 = 1$ y el punto de corte será $(-1, 0)$.

Simetrías



f es PAR o simétrica respecto del eje Y

$$f(-x) = f(x)$$



f es IMPAR o simétrica respecto del origen

$$f(-x) = -f(x)$$

Tener en cuenta las simetrías de una función puede ahorrar mucho trabajo para dibujar su gráfica.

Ejemplos:

- Son funciones pares y por tanto simétricas respecto del eje OY:
 $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = x^4 - 2x^2$, $y = e^{x^2}$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x^2 - 4}$,
- Son funciones impares y por tanto simétricas respecto al origen de coordenadas:
 $y = x$, $y = \sin x$, $y = x^3 - x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = \sqrt[3]{x}$,

No todas las funciones presentan una de estas dos simetrías.. Por ejemplo $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

Periodicidad

$f(x)$ es periódica de periodo T, $T > 0$, si $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \dots$, $\forall x \in \text{Dom} f$

Este punto es de interés casi exclusivo para las funciones trigonométricas.

Función	senx	cosx	tgx	Senkx	coskx	tgkx
Periodo	2π	2π	π	$2\pi/k$	$2\pi/k$	π/k

Si la función es periódica se puede estudiar la función en uno de sus periodos y después reproducir, tantas veces como se quiera, la parte de la gráfica correspondiente a ese periodo.

Asíntotas.

– Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$ (número real), la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal**. (Puede haber sólo por la derecha o por la izquierda)

– Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ (con a número real), la recta $x = a$ es una **asíntota vertical**.

– Si al alejarse infinitamente un punto de la curva, x e y crecen infinitamente, para que la recta $y = mx + n$ sea una **asíntota oblicua** debe tender a cero la diferencia entre las ordenadas de la recta y la curva para la misma abscisa. Esta definición lleva en sí un método de cálculo para los

coeficientes m y n . $m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$ (número real distinto de cero); y si existe,

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - mx].$$

SI HAY ASÍNTOTA HORIZONTAL NO HAY OBLICUA

En las funciones racionales, si hay asíntota horizontal u oblicua es la misma por la derecha y por la izquierda

Es muy importante estudiar los límites en los puntos frontera del dominio

Ejemplo 1: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

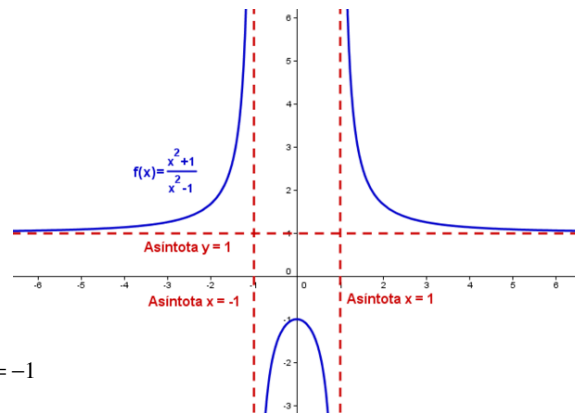
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow \text{Hay una asíntota horizontal en } y = 1$$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty \Rightarrow \text{Hay una asíntota vertical en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty \Rightarrow \text{Hay una asíntota vertical en } x = -1$$



Ejemplo 2: $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 3}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 3} = \pm \infty \Rightarrow \text{no hay asíntota horizontal}$$

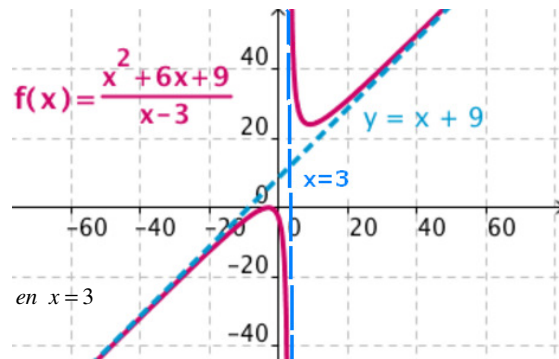
Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 3} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 3} = -\infty \Rightarrow \text{hay asíntota vertical en } x = 3$$

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 3x} = 1; \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 + 6x + 9}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{9x + 9}{x - 3} = 9$$

Luego hay asíntota oblicua en $y = x + 9$



Puntos singulares. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

¡Ojo al dominio!

Puntos singulares: $f'(a) = 0$. **Puntos críticos:** $f'(a) = 0$ o $f'(a)$ no existe

Teorema:

Si $f(x)$ es derivable en $x = a$:

- si $f'(a) > 0 \rightarrow f$ es creciente en $x = a$
- si $f'(a) < 0 \rightarrow f$ es decreciente en $x = a$
- si f tiene un máximo o mínimo relativo en $x = a \rightarrow f'(a) = 0$ (Condición necesaria pero no suficiente de extremo relativo)

1. Condición necesaria de extremo relativo

Si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x_0 \in D$ y x_0 es un extremo relativo de f , entonces $f'(x_0) = 0$.

Esta condición es necesaria pero no es suficiente; por ejemplo, $f(x) = x^3$ tiene como derivada $f'(x) = 3x^2$ que se anula en $x = 0$ y sin embargo, es estrictamente creciente en $x = 0$ por lo que no tiene extremo en dicho punto.

2. Condición suficiente de extremo relativo

Si f es una función con derivada segunda continua en x_0 y $f'(x_0) = 0$, se verifica:

- a) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene en x_0 un mínimo relativo estricto.
- b) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene en x_0 un máximo relativo estricto.

3. Condición suficiente de extremo relativo

f es continua

$\left. \begin{array}{l} f \text{ estrictamente creciente a la izquierda de } x_0 \\ f \text{ estrictamente decreciente a la derecha de } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } x_0 \text{ un máximo relativo estricto}$

(Se establece condición análoga para mínimo relativo)

Ejemplo $f(x) = x + x^{\frac{2}{3}}$

Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$; ya que es suma de un polinomio que está definido siempre y de una raíz cúbica que igualmente está definida para todos los números reales.

Cortes con los ejes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eje } OY: x = 0 \Rightarrow f(0) = 0; \text{ corte en } (0, 0) \\ \text{eje } OX: y = 0 \Rightarrow x + \sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x} + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1; \text{ cortes en } (0, 0) \text{ y } (-1, 0) \end{array} \right.$$

Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, entonces $f'(x)$ no está definida para $x = 0$, luego el estudio que hacemos para

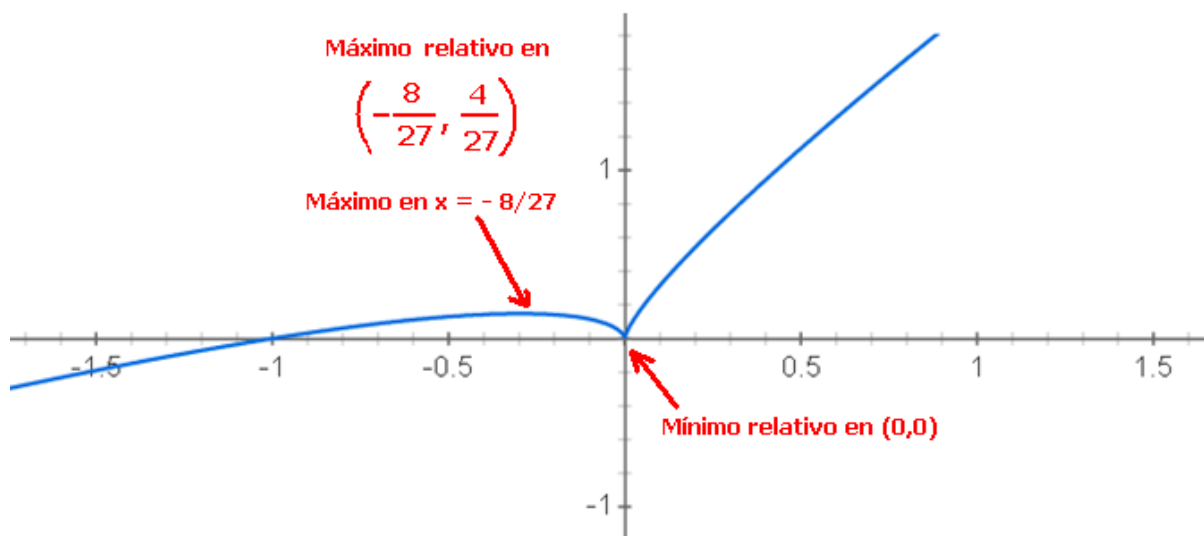
determinar máximos y mínimos excluye ese punto del que por ahora no podemos decir nada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{8}{27}$$

Dividimos el campo de existencia en los siguientes intervalos $\left(-\infty, -\frac{8}{27}\right); \left(-\frac{8}{27}, 0\right); (0, \infty)$.

	$\left(-\infty, -\frac{8}{27}\right)$	$-\frac{8}{27}$	$\left(-\frac{8}{27}, 0\right)$	0	$(0, \infty)$
$3\sqrt[3]{x} + 2$	-	0	+	+	+
$3\sqrt[3]{x}$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	+

De aquí se deduce que la función es creciente en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{8}{27}\right) \cup (0, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $\left(-\frac{8}{27}, 0\right)$. la función presenta un mínimo en el punto $x = 0$.

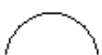


Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

1. Condiciones suficientes de concavidad y convexidad

Si f es una función con derivada segunda continua en un punto x_0 , se verifica :

a) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es 

b) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es 

2. Condición necesaria de punto de inflexión

Si f es una función con derivada segunda continua en un punto x_0 y f tiene en x_0 un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$.

3. Condición suficiente de punto de inflexión

Si f es una función con derivada tercera continua en un punto x_0 y $f''(x_0) = 0$, se verifica:

$$f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ es un punto de inflexión de } f$$

Nota: Entre los candidatos a puntos de inflexión, hay que tener en cuenta no sólo aquellos puntos que anulan $f''(x)$ sino también donde no existe.

Ejemplo $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{1\}$

Cortes con los ejes:
$$\begin{cases} \text{eje } OY: x = 0 \Rightarrow f(0) = 0; \text{ corte en } (0, 0) \\ \text{eje } OX: y = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 0, x = 0; \text{ corte en } (0, 0) \end{cases}$$

Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \frac{-x^3}{(x+1)^2} \neq \pm f(x)$, la función no es par y tampoco impar

Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty \quad \text{No tiene asíntotas horizontales}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty; \quad \text{la recta } x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\text{Buscamos asíntota oblicua: } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2(x-1)} \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{2x - 2} \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2$$

Con lo que la recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua para la función.

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 3$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, \infty)$
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$(x-3)$	-	-	-	-	-	0	+
$(x-1)^3$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$	+	0	+	$\nexists$	-	0	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(1, 3)$.

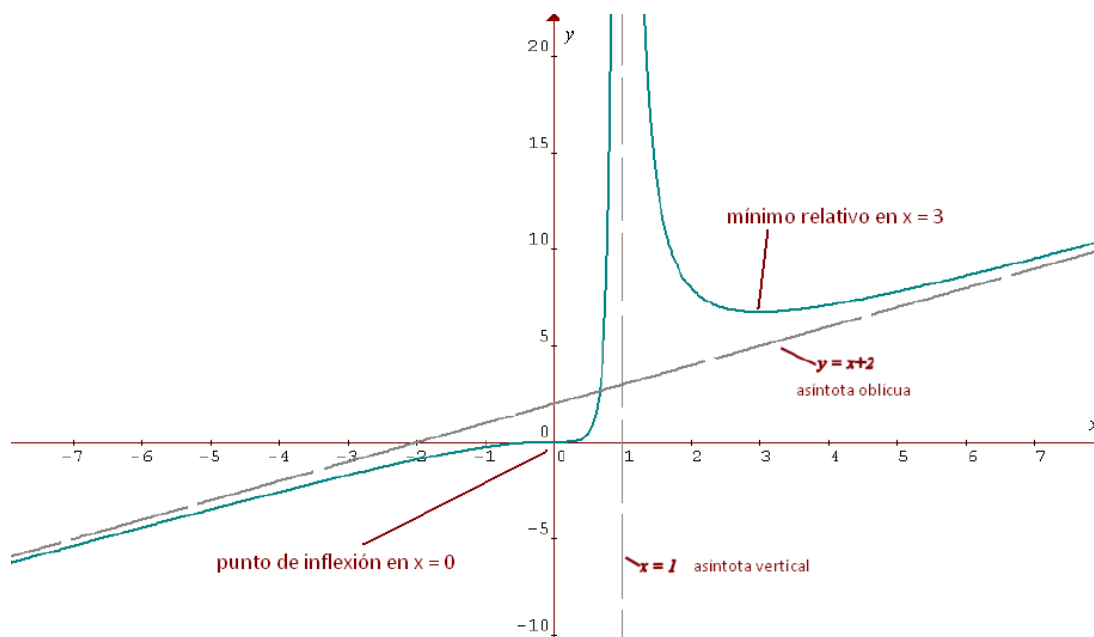
La función tiene un mínimo en $x = 3$. Punto $\left(3, \frac{27}{4}\right)$

Puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \quad f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x = 0$$

		0	
	$6x$	-	+
$f''(x)$	$\frac{6x}{(x-1)^4}$	-	+

$f(x) \longrightarrow \cap \cup$ en $(0, 0)$ la función tiene un punto de inflexión



Problemas de optimización:

Para determinar los **valores máximos y mínimos** de una función continua f en un cierto intervalo cerrado $[a,b]$

1º Se hallan los puntos $c_1, c_2, c_3, \dots, c_p$, del intervalo (a,b) donde f no es derivable.

2º Se obtiene $f'(x)$ y se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$. Sean $a_1, a_2, \dots, a_k$, son las soluciones que están en (a,b) .

3º Se calculan $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \dots, f(c_p)$, $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)$, $f(a)$ y $f(b)$ y se eligen el valor mayor para el máximo y el menor valor para el mínimo.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 1 \\ 2(x-2)^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ halla su valor máximo y su valor mínimo en el intervalo $[0,4]$

f es continua en $[0,4]$ y derivable en $[0,4] - \{1\}$ (puedes comprobarlo)

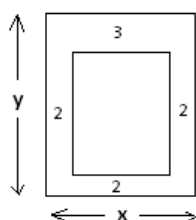
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 4(x-2) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ y } x = 2. \text{ De esos tres valores } -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin [0,4]$$

$$f(1) = 0; \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0,38; \quad f(2) = -2; \quad f(0) = 0; \quad f(4) = 6$$

Luego el valor máximo de f en $[0,4]$ es 6, que se toma para $x = 4$, y el valor mínimo de f en $[0,4]$ es 0, que se toma en $x = 0$ y en $x = 1$.

Ejemplo Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm^2 de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm. y el superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página que permitan obtener la mayor área impresa posible.



Alto de la página impresa: $y-5$

Ancho de la página impresa: $x-4$

Área impresa = $(x-4) \cdot (y-5)$ (función objetivo)

Área páginas = $x \cdot y = 600$ (relación) $\Rightarrow y = \frac{600}{x}$

$$\text{Función: } f(x, y) = (x-4) \cdot (y-5) \Rightarrow f(x) = (x-4) \cdot \left(\frac{600}{x} - 5 \right) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20$$

$$\text{Derivando: } f'(x) = -5 + \frac{2400}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Igualando a cero: } f'(x) = 0 &\Rightarrow -5 + \frac{2400}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2400}{x^2} = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{2400}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \pm \sqrt{480} = \pm 21,91 \end{aligned}$$

Como no puede ser $-21,91$ ya que las longitudes no pueden ser negativas. El único punto posible máximo ó mínimo de $f(x)$ es $x = +21,91$

$$\text{Hallando la segunda derivada: } f''(x) = \frac{0 - 2400 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-4800}{x^3}$$

Sustituimos el posible máx. ó mín. en dicha derivada: $f''(21,91) = (-) < 0$ máximo.

$$\text{Si } x = 21,91 \Rightarrow y = \frac{600}{21,91} = 27,38$$

Solución: La hoja debe tener de ancho 21,91 cm y 27,38 cm de alto..

EJERCICIOS

Estudio completo y gráfica de las siguientes funciones:

1) $y = 3x^4 - 4x^3$

2) $y = x^4 - 6x^2 + 5x + 2$

3) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$

4) $y = \frac{x^2}{x+3}$

5) $y = xe^x$

6) $y = \ln(x^2 - 1)$

7) $y = 3x - x^3$

8) $y = x^4 - 2x^2 - 8$

9) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ (resuelta arriba)

10) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

11) $y = \frac{x-1}{x-2}$

12) $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$