PROBLEMAS PAU COMUNIDAD DE MADRID. ANÁLISIS

1. CURSO 15 – 16 MODELO OPCIÓN A

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3},$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,5 puntos) Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.

c) (0,75 puntos) El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

d) (1 punto) El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

2. CURSO 15 – 16 MODELO OPCIÓN B

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x < 1, \\ x\,e^{1-x}, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0,5 puntos) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

3. CURSO 14 - 15 MODELO OPCIÓN A

2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.

b) (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

4. CURSO 14 - 15 MODELO OPCIÓN B

2 *(3 puntos)* Hallar

a) (1 punto). $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

b) (1 punto). $\int (3x+5)\cos x\,dx$.

c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$$

5. PAU JUNIO 2015 OPCIÓN A

1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

donde ln denota logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\int f(x)\,dx$.

6. PAU JUNIO 2015 OPCIÓN B

2 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{Se pide:}$$

1. (1 punto). Estudiar la continuidad de f.
2. (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.
3. (1 punto). Calcular $\int_1^3 f(x)\,dx$.

7. SEPTIEMBRE 2015 OPCIÓN A

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

a) ($0'5$ puntos) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) ($1'5$ puntos) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Calcular la integral definida $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}dx$.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}$.

8. SEPTIEMBRE 2015 OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x\ln(x), & \text{si } x > 0, \\ x^2e^x, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

9. CURSO 13 - 14 MODELO OPCIÓN A

3 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\arctan x - x}{x^3}$

b) (1 punto). $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}[1-\sin x]^{1/x}$

4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \displaystyle\int_5^6 g(x)\,dx$.
Hallar

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx$$

b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\displaystyle\int_1^e f(u)\,du = \frac{1}{2}$.
Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx.$$

10. CURSO 13 - 14 MODELO OPCIÓN B

1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

se pide:

a) (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.

b) (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

11. JUNIO 14 OPCIÓN A

3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $f : R \longrightarrow R$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \;\text{ y }\; f''(-2)$$

b) (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

4 *(2 puntos)* Calcular justificadamente:

a) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}$

b) $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

12. JUNIO 14 OPCIÓN B

1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

(donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular el valor de a, para que $f(x)$ sea continua en todo R.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

13. SEPTIEMBRE 14 OPCIÓN A

1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x+4}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$.

14. SEPTIEMBRE 14 OPCIÓN B

2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.

c) (1 punto). Calcular la integral: $\displaystyle\int_1^{\ln 5} f(x)\,dx$

15. CURSO 12 – 13. MODELO OPCIÓN A

Problema 14.1.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{se pide:}$$

1. (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
2. (1 punto). Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.
3. (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

16. CURSO 12 – 13. MODELO OPCIÓN B

Problema 14.2.2 *(3 puntos)*

1. (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.
2. (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.
3. (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.

17. JUNIO 13. OPCIÓN A

Problema 14.3.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se pide:

1. (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.
2. (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 2$.

Problema 14.3.4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a)} \int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx \qquad \text{b)} \int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx$$

18. JUNIO 13. OPCIÓN B

Problema 14.4.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

1. (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. (1 punto). Calcular los puntos de inflexion de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3. (1 punto). Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$

19. SEPTIEMBRE 13. OPCIÓN A

Problema 14.5.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2} \qquad \text{se pide:}$$

1. (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.
2. (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
3. (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

20. SEPTIEMBRE 13. OPCIÓN B

Problema 14.6.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

1. (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.
2. (1 punto). Calcular $\int_0^1 x f(x)\, dx$.

Problema 14.6.4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

1. (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$.
2. (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

21. CURSO 11 – 12. MODELO OPCIÓN A

3 *(2 puntos)* Halla el valor de λ para que la función $f(x)$ sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

4 *(2 puntos)* Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

22. CURSO 11 – 12. MODELO OPCIÓN B

1 *(3 puntos)* Sabiendo que la funcion $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, ademas, que:

$F(2) = 1$, $F(3) = 2$, $F(4) = 6$, $F(5) = 3$, $f(3) = 3$ y $f(4) = -1$; Hallar:

1. (0,5 puntos). $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$
2. (1 punto). $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$
3. (1,5 puntos). $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx$.

23. JUNIO 12. OPCIÓN A

Problema 13.3.3 *(2 puntos)* Hallar a, b, c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Problema 13.3.4 *(2 puntos)* Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^\pi e^{2x}\cos x\,dx$
- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x}\,dx$

24. JUNIO 12. OPCIÓN B

Problema 13.4.1 *(3 puntos)* Dadas las funciones

$$f(x)=\frac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}},\quad g(x)=(lnx)^x,\quad h(x)=sen(\pi-x)\qquad \text{se pide:}$$

1. (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.
2. (1 punto). Calcular $g'(e)$.
3. (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

25. JUNIO 12. OPCIÓN A (coincidente)

Problema 13.5.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\cos^2 x$, se pide:

1. (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi,\pi)$
2. (1 punto). Calcular los puntos de inflexion de f en el intervalo $(-\pi,\pi)$
3. (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4)=0$.

26. JUNIO 12. OPCIÓN B (coincidente)

Problema 13.6.3 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}\qquad \text{se pide:}$$

1. (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} f(x)$
2. (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

Problema 13.6.4 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u)\,du = 3$. Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$$

2. (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x)=\sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

27. SEPTIEMBRE 12. OPCIÓN A

Problema 13.7.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si} \quad x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \qquad \text{se pide:}$$

1. (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?
2. (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.
3. (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

28. SEPTIEMBRE 12. OPCIÓN B

Problema 13.8.2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

1. (1 punto). Determinar, justicando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
2. (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.
3. (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recúerdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

29. CURSO 10 – 11. MODELO OPCIÓN A

Problema 12.1.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

1. (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.
2. (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

30. CURSO 10 – 11. MODELO OPCIÓN B

Problema 12.2.3 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

1. (1 punto). $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0^+} x e^{1/x}$
2. (1 punto). $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

Problema 12.2.4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

31. JUNIO 11. OPCIÓN A

Problema 12.3.3 *(2 puntos)* Se pide:

1. (1 punto). Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$.

2. (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Problema 12.3.4 *(2 puntos)* Se pide:

1. (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

2. (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raiz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

32. JUNIO 11 OPCIÓN B

Problema 12.4.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4+1}{x^3} \qquad \text{Se pide:}$$

1. (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

2. (1 punto). Obtener las asíntotas de de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

3. (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

33. SEPTIEMBRE 11. OPCIÓN A

Problema 12.5.1 *(3 puntos).*

1. (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$$

2. (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$

3. (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2+9x+14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

34. SEPTIEMBRE 11. OPCIÓN B

Problema 12.6.3 *(2 puntos).* Dada la funcion

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si} \quad x<0 \\ k & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x=0$. Justificar la respuesta.

Problema 12.6.4 *(2 puntos).*

1. (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x=0$ y $x=2\pi$.

2. (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x=0$ y $x=2\pi$.

35. A

36. A

Modelo 2005 - Opción A

Problema 6.1.1 *(2 puntos)*

1. Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

2. Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Junio 2011 - Opción A

Problema 12.3.4 *(2 puntos)* Se pide:

1. (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

2. (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raiz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Modelo 2006 - Opción B

Problema 7.2.2 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x} \qquad \text{Se pide:}$$

1. (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

2. (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Modelo 2009 - Opción B

Problema 10.2.3 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

1. (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

2. (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?