TEOREMA DE BOLZANO:

Probar que la ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$ tiene alguna raíz real, aproximando su valor hasta las décimas.

Consideramos la función $f(x) = x^3 - 4x - 2$ la cual es continua por ser polinómica.

Tanteando, tenemos que $f(2) = -2$ y $f(3) = 13$

Es decir, tenemos una función continua en el intervalo $[2, 3]$ donde signo de $f(2) \neq$ signo de $f(3)$.

Por lo tanto, por el Teorema de Bolzano, existe un $c \in [2, 3]$ tal que $f(c) = 0$. Para aproximar la solución a la décima seguimos tanteando: $f(2,2) = -0,152$ y $f(2,3) = 0,967$

Tememos una función cotinua en el intervalo $[2,2,\ 2,3]$ donde signo de $f(2,2) \neq$ signo de $f(2,3)$.

Es decir, existe un $c \in [2,2,\ 2,3]$ tal que $f(c) = 0$.

SELECTIVIDAD

Determinar si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raíz real negativa.

Consideremos la función: $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$

Vamos a intentar aplicar el teorema de Bolzano para encontrar una raíz negativa del polinomio, es decir, para encontrar un valor de $c < 0$ que cumpla que $f(c) = 0$.

La función f es continua en todo R por ser polinómica.

Tanteando con valores negativos, tenemos que:

$f(-4) = 191 > 0$

$f(-1) = -4 < 0$

Por lo tanto, por el Teorema de Bolzano, existe un $c \in [-4, -1]$ tal que $f(c) = 0$.

La función se anula en algún punto del intervalo $(-4\ ,\ -1)$, por lo que el polinomio tiene una raíz negativa en dicho intervalo.

SELECTIVIDAD

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

¿es continua?

Prueba que existe $c \in [0 , 3]$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano?

Las funciones que definen la función f son polinómicas, luego son continuas para cualquier valor de la recta real, y en particular en lo son en el intervalo [0 , 3] .

El único valor en el que puede haber problema es en el de abscisa $x = 2$. Estudiemos la continuidad de f en dicho punto:

$f(2) = -2^2 + 1 = -3$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -x^2 + 1 = -3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 1 = 1$$

Como los límites laterales no coinciden la función f no es continua en $x = 2$.

Puesto que la función f no es continua en todo el intervalo [0 , 3] , no podemos aplicar el teorema de Bolzano.

Sin embargo, podemos encontrar un $c \in [0 , 3]$ tal que $f(c) = 0$. Por ejemplo:

$$\text{Si} \quad c = 1 \in [0 , 3] \quad \Rightarrow \quad f(1) = -1^2 + 1 = 0$$

Esto no contradice el teorema. El que no se cumplan las condiciones del teorema de Bolzano no significa que no exista un valor de c en el que la función se anule.

SELECTIVIDAD

¿Puede asegurarse, utilizando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene una raíz en el intervalo $[\pi/4 , 3\pi/4]$?

Razona la respuesta

Sabemos que la función tangente no está definida en $x = \pi/2$, y $\pi/2 \in [\pi/4 , 3\pi/4]$.

Por tanto, la función f no es continua en todos los puntos del intervalo $[\pi/4 , 3\pi/4]$.

Como no cumple una de las condiciones del teorema de Bolzano, no podemos aplicarlo y asegurar que existe $c \in [\pi/4 , 3\pi/4]$ tal que $f(c) = 0$.

Es decir, no podemos asegurar que f tenga una raíz en $[\pi/4 , 3\pi/4]$.

SELECTIVIDAD

La función f se define en [−1 , 1] del siguiente modo: vale −1 si $x \le 0$ y vale $2x^3 - 1$ si $x > 0$.

Explica si f verifica el teorema de Bolzano.

La función que nos describen es:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 0 \\ 2x^3 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } [-1, 1]$$

Las funciones que definen la función f son polinómicas, luego son continuas para cualquier valor de la recta real , en particular en el intervalo $[-1 , 1]$.

El único valor en el que puede haber problema es en el de abscisa $x = 0$. Estudiemos la continuidad de f en dicho punto:

$f(0) = -1$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x^3 - 1 = -1$$

Como los límites laterales coinciden tenemos que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$$

Se cumple la condición de continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$, por lo que es continua en todo el intervalo $[-1, 1]$.

Comprobamos que en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ el signo de la función es distinto:

$f(-1) = -1 < 0$

$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 > 0$

Por tanto, la función f verifica el teorema de Bolzano en $[-1, 1]$.

SELECTIVIDAD

Probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene solución positiva.

Consideremos la función: $f(x) = x - \cos x$

$f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ puesto que es la suma de dos funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, por lo que es continua en el intervalo $[0, 1]$.

Además, tenemos que:

- $f(0) = 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1 < 0$
- $f(1) = 1 - \cos 1 = 1 - 0{,}54 = 0{,}46 > 0$

Según el teorema de Bolzano, existe un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$

Por lo tanto se demuestra que la ecuación tiene al menos una solución positiva.

SELECTIVIDAD

Enuncia el teorema de Bolzano. Aplícalo para demostrar que la ecuación $2^{x-1} = 1 + (1 + x)^2$ tiene al menos una solución, determinando un intervalo (a, b) con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, en el cual se encuentre dicha solución.

Teorema de Bolzano: Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y **signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$**, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que **$f(c) = 0$**.

Vamos a escribir la ecuación en forma de una función dependiente de la variable x :

$$2^{x-1} = 1 + (1 + x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + (1 + x)^2 - 2^{x-1} = 0$$

Consideremos pues la función: $f(x) = 1 + (1 + x)^2 - 2^{x-1}$

La función f es continua en todo R por ser suma de funciones continuas:

$x \rightarrow 1 + (1 + x)^2$ continua por ser polinómica

$x \rightarrow 2^{x-1}$ continua por ser exponencial

Observamos que es dificil encontrar dos números $a,b \in R$ tales que signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$, así que vamos a calcular los límites en los extremos de la función, es decir, en $\pm\infty$:

Calculando los límites por separado tenemos que:

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + (1 + x)^2 = \lim_{x \to +\infty} 1 + (1 - x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} -2^{x-1} = \lim_{x \to +\infty} -2^{-x-1} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2^{x+1}} = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + (1 - x)^2 - \frac{1}{2^{x+1}} = +\infty$$

Por otro lado:

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + (1 + x)^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} -2^{x-1} = -\infty$$

Y por comparación de infinitos (un infinito exponencial es mayor que el infinito de un polinomio) se tiene que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + (1 + x)^2 - 2^{x-1} = -\infty$$

Como el límite de f en $-\infty$ tiene distinto signo que el límite de f en $+\infty$, podemos aplicar el teorema de Bolzano.

Por tanto, existe al menos un número real $c \in R$ tal que $f(c) = 0$, es decir, es solución de la ecuación del enunciado.

Vamos a intentar encontrar un intervalo que contenga a dicho $c \in R$.

$f(7) = 1 + 8^2 - 2^6 = 1 > 0$

$f(8) = 1 + 81 - 2^7 = -46 < 0$

Luego $c \in (7 , 8)$.

Probar que la función f(x) = x + sen x − 1 es continua para toda $\mathbb{R}$ y probar que existe al menos una raíz real de la ecuación x + sen x − 1 = 0.

Probar que la función f(x) = x + sen x − 1 es continua para toda $\mathbb{R}$ y probar que existe al menos una raíz real de la ecuación x + sen x − 1 = 0.

La función es continua por ser la suma de funciones continuas.

$f(0) = 0 + \text{sen } 0 - 1 = -1 < 0.$

$f(\pi/2) = \pi/2 + \text{sen } \pi/2 - 1 = \pi/2 > 0.$

Por cumplirse el **teorema de Bolzano**, podemos afirmar que al menos existe un valor c que pertenece al intervalo (o, π/2) tal que:

$f(c) = 0 \quad c + \text{sen } c - 1 = 0$

Por tanto **existe al menos una solución real** a la ecuación x + sen x − 1 = 0.

Sean f y g dos funciones continuas en [a, b] y tales que f(a) > g(a) y f(b) < g(b). Demostrar que ∃ c ∈ (a, b) tal que f(c) = g(c).

Sean f y g dos funciones continuas en [a, b] y tales que f(a) > g(a) y f(b) < g(b). Demostrar que ∃ c ∈ (a, b) tal que f(c) = g(c).

Sea la función *h* definida por h(x) = f(x) − g(x).

Por ser continuas f y g en [a, b], la función h también lo es.

$f(a) > g(a)$ $h(a) = f(a) - g(a) > 0$

$f(b) < g(b)$ $h(b) = f(b) - g(b) < 0$.

Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$h(c) = 0$ $f(c) - g(c) = 0$ **$f(c) = g(c)$**

TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS:

SELECTIVIDAD

Dadas las funciones $f(x) = x \cdot \text{sen } x$ y $g(x) = \ln x$ justifica que existe un punto del intervalo $[2, 3]$ donde ambas funciones toman el mismo valor.

Consideremos la función: **$h(x) = x \cdot \text{sen } x - \ln x$**

$f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y $g(x)$ lo es en $(0, +\infty)$, por lo que $h(x)$ es continua en el intervalo $[2, 3]$.

Además, tenemos que:

- $h(2) = 1{,}12 > 0$
- $h(3) = -0{,}67 < 0$

Según el teorema de Bolzano, existe un $c \in (2, 3)$ tal que $h(c) = 0$

Es decir, $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$

Por lo tanto las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en algún punto de dicho intervalo.

SELECTIVIDAD

Demostrar que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1/x$ se cortan en algún punto $x > 0$:

Consideremos la función: **$h(x) = e^x - 1/x$**

$f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y $g(x)$ en $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo que $h(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Además, tenemos que:

- $h(0,5) = -0,35 < 0$

- $h(1) = 1,72 > 0$

Según el teorema de Bolzano, existe un $c \in (0,5,\ 1)$ tal que $h(c) = 0$

Es decir, $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = g(c)$

Por lo tanto las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en algún punto de dicho intervalo.

SELECTIVIDAD

Demostrar que las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente:

Consideremos la función: **$h(x) = \ln x - e^{-x}$**

$f(x)$ es continua en $(0, +\infty)$ y $g(x)$ en $\mathbb{R}$, por lo que $h(x)$ es continua en $(0, +\infty)$.

Además, tenemos que:

- $h(1) = \ln 1 - e^{-1} = 0 - 1/e < 0\ 0$

- $h(e) = \ln e - e^{-e} = 1 - 1/e^{e} > 01,72 > 0$

Según el teorema de Bolzano, existe un $c \in (1, e)$ tal que $h(c) = 0$

Es decir, $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = g(c)$

Por lo tanto las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en algún punto de dicho intervalo.

TEOREMA DE WEIERSTRASS:

SELECTIVIDAD

Demostrar que la siguiente función alcanza máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$ y calcularlos.

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

El denominador de la función no se anula para ningún valor de x puesto que $1 + x^2 \geq 1$.

Por lo tanto, la función es continua en el intervalo $[-1, 1]$.

Aplicando el teorema de Wierstrass (o teorema del máximo-mínimo), la función alcanza máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

Para calcular los máximos y los mínimos de la función estudiamos entre que valores oscila la función para el intervalo dado.

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq 1 + x^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

Es decir, el valor mínimo de la función es $1/2$ y el valor máximo 1 .

Para calcular en que puntos se alcanzan el mínimo y el máximo, resolvemos las siguiente igualdades:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Por lo tanto la función alcanza un máximo absoluto en el punto $(0, 1)$ y el mínimo absoluto lo alcanza en los puntos $(-1, 1/2)$ y $(1, 1/2)$.

Dada la función $f(x) = x^3$, estudiar si está acotada superiormente e inferiormente en el intervalo [1, 5] e indica si alcanza sus valores máximos y mínimos.

Dada la función $f(x) = x^3$, estudiar si está acotada superiormente e inferiormente en el intervalo [1, 5] e indica si alcanza sus valores máximos y mínimos.

La función es continua en el intervalo [1, 5], como consecuencia podemos afirmar que **está acotada** en dicho intervalo.

Por ser continua en el intervalo [1, 5] se cumple el **teorema de Weierstrass**, que afirma que se **alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos** en el intervalo [1, 5].