Derivadas laterales

Se define la **derivada por la izquierda** de f(x) en el punto x = a :

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se define la **derivada por la derecha** de f(x) en el punto x = a :

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A ambas derivadas se les llama **derivadas laterales**.

Derivabilidad y continuidad en un punto

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si} \quad f(x) \quad \text{es continua en} \quad x = a \\ \text{Existe} \quad \lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = k \\ \text{Existe} \quad \lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(a^-) = k \\ f'(a^+) = k \end{array} \right.$$

Si f(x) es derivable en x=a si es continua en x = a y existen los límites laterales de la función derivada y estos son iguales.

Derivabilidad y continuidad en un intervalo

Se dice que **f(x) es derivable en un intervalo cerrado [a, b]** si es derivable en (a, b) y existen además las derivadas por la derecha en x = a y por la izquierda en x = b.

Casos en que una función es continua y no es derivable

Ejemplo de una gráfica con un punto angular:

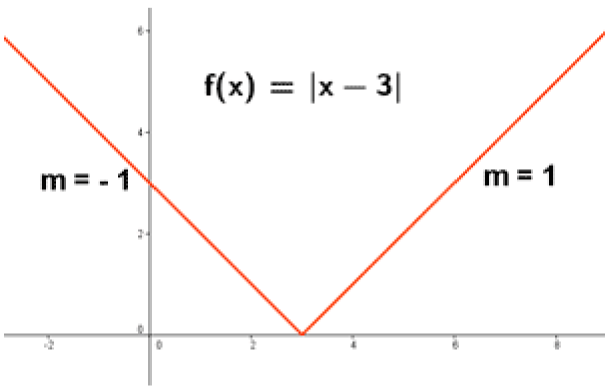
Sea la función f(x) = | x - 3 |

$$f(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -(x - 3) & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

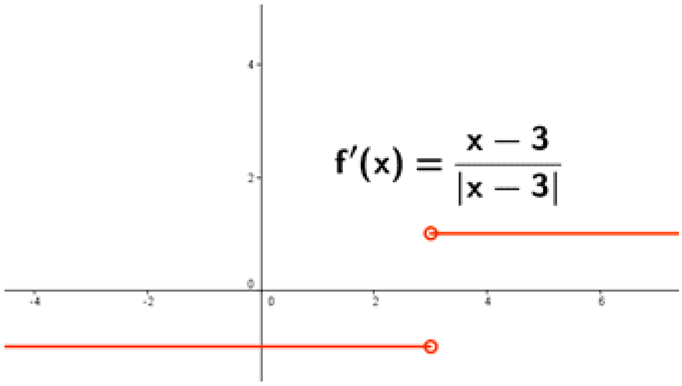
Calculamos los límites laterales en el punto x = 3 :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x - 3| - 0}{x - 3} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|x - 3| - 0}{x - 3} = +1 \end{cases}$$

Como los límites laterales (derivada por la izquierda y derivada por la derecha no son iguales, la función f(x) no es derivable en x = 3 y la gráfica de f(x) no tiene tangente en el punto (3, 0) .



$$f'(x) = \frac{x - 3}{|x - 3|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$



Ejemplo de una gráfica con una recta tangente vertical:

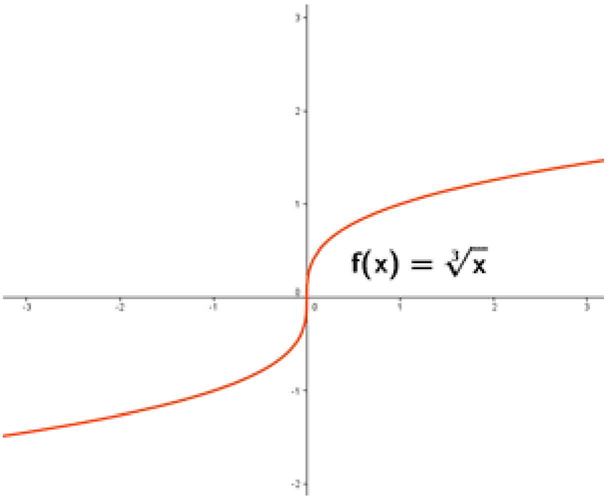
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

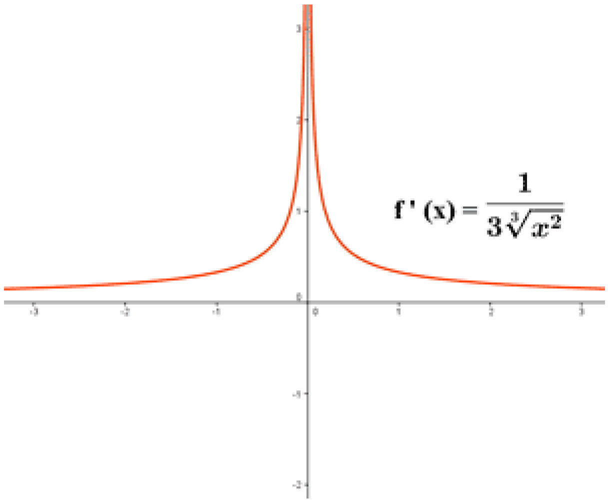
f(x) es continua en x = 0 . Sin embargo, al calcular el límite cuando x tiende a 0 , obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{3}-1} = \lim_{x \to 0} x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

El límite de la función f(x) cuando x tiende a 0 es infinito, luego la recta tangente en x = 0 es vertical. Es decir, la función f(x) no es derivable en x = 0 .





Ejemplo de una función a trozos continua y no derivable:

Dada la siguiente función:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{3x - 2} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \leq 1} \\ \mathbf{x^2} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x > 1} \end{cases}$$

1) Comprobar que es continua en $x = 1$ pero no derivable.

2) Da un ejemplo de función que sea derivable y no sea continua.

1) La función será continua si y solo si se cumple que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

Como $f(1) = 1$, tenemos que hallar los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3x - 2) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$$

Hemos demostrado que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \\ \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto la función es continua en el punto $x = 1$.

Para comprobar que la función no es derivable en $x = 1$, hay que demostrar que no existe el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Para ello basta con probar que los límites laterales son distintos:

Límite por la izquierda

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(3x - 2) - 1}{x - 1} = 3$$

Límite por la derecha

$$f'(1+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2$$

Como los límites laterales en $x = 1$ son distintos, la función no es derivable en dicho punto.

2) No es posible encontrar un ejemplo puesto que todas las funciones derivables son continuas.

Conclusión entre derivabilidad y continuidad:

Según los dos ejemplos anteriores una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en ese punto. Esto ocurre en los puntos angulosos o angulares y en los puntos cuya tangente es una recta vertical (perpendicular al eje X).

DERIVABLE IMPLICA CONTINUIDAD

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él. No ocurre en sentido contrario como se ha demostrado en los ejemplos anteriores.

1. **Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función f(x) = |x|.**

En primer lugar estudiamos la continuidad en x = 0.

$$f(0)=0 \qquad \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

La función es continua, por tanto podemos estudiar la derivabilidad.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-(0+h)-0}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{0+h-0}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Puesto que las derivadas laterales en x = 0 son distintas, la función no es derivable en dicho punto.

2. **Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función:**

$$f(x)=\begin{cases} -x & Si \quad x<0 \\ x^2 & Si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

En primer lugar estudiamos la continuidad en x = 0.

$$f(0)=0 \qquad \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

La función es continua, por tanto podemos estudiar la derivabilidad.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-(0+h)-0}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{x \to 0^+} h = 0$$

No es derivable en x = 0.

3. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & Si \quad x < 0 \\ x & Si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

En primer lugar estudiamos la continuidad en x = 0.

$$f(0) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

La función no es continua, por tanto tampoco es derivable.

4. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < 0 \\ x & if \quad x \geq 0 \end{cases}$$

En primer lugar estudiamos la continuidad en x = 0.

$$f(0) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

La función no es continua, por tanto tampoco es derivable.

5. Hallar el punto en que y = |x + 2| no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.

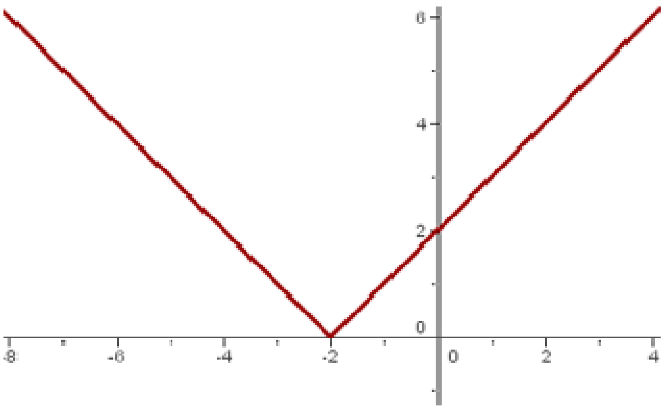
$$f(-2) = \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<-2\\ 1 & \text{si } x>-2\end{cases}$$

$f'(-2)^- = -1 f'(-2)^+ = 1$

No será derivable en: x= -2.



En x = -2 hay un pico, por lo que no es derivable en x= -2.

6. Hallar los puntos en que y = |x ^{2} − 5x + 6| no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.

$$f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$

$$f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=0$$

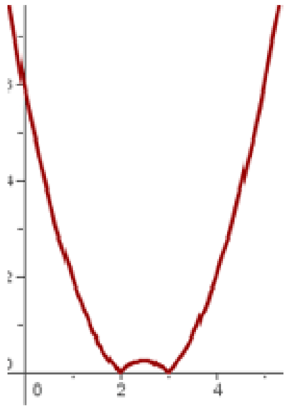
La función es continua en todo R .

$$f'(x)=\begin{cases}2x-5 & \text{si } x<2\\ -2x+5 & si\ 2<x<3\\ 2x-5 & \text{si } x>3\end{cases}$$

$f'(2)^- = -1 f'(2)^+ = 1$

$f'(3)^- = -1 f'(3)^+ = 1$

Como no coinciden las derivadas laterales la función no será derivable en: x=2 y x=3.



Podemos observar que en x=2 y en x=3 tenemos dos puntos angulosos, por lo que la función no será derivable en ellos.

7. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x+2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{2x}{\pi}+1 & si \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ sen\, x+1 & si \quad x\geq\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

La función no es continua en x = 0 porque no tiene imagen. Por tanto tampoco es derivable.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=sen\frac{\pi}{2}+1=2$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{2x}{\pi}+1=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}sen\frac{\pi}{2}+1=2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)}f(x)$$

Por lo que es continua, veamos si es derivable mediante las **fórmulas de derivadas trigonómetricas inmediatas**.

$$f'(x)=\begin{cases} -sen\,x & si & x<0 \\ \dfrac{2}{\pi} & si & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & si & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}=\frac{2}{\pi} \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Como las derivadas laterales no coinciden no es derivable en el punto.